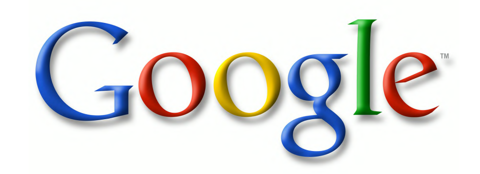
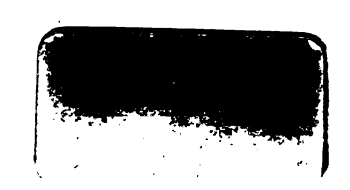
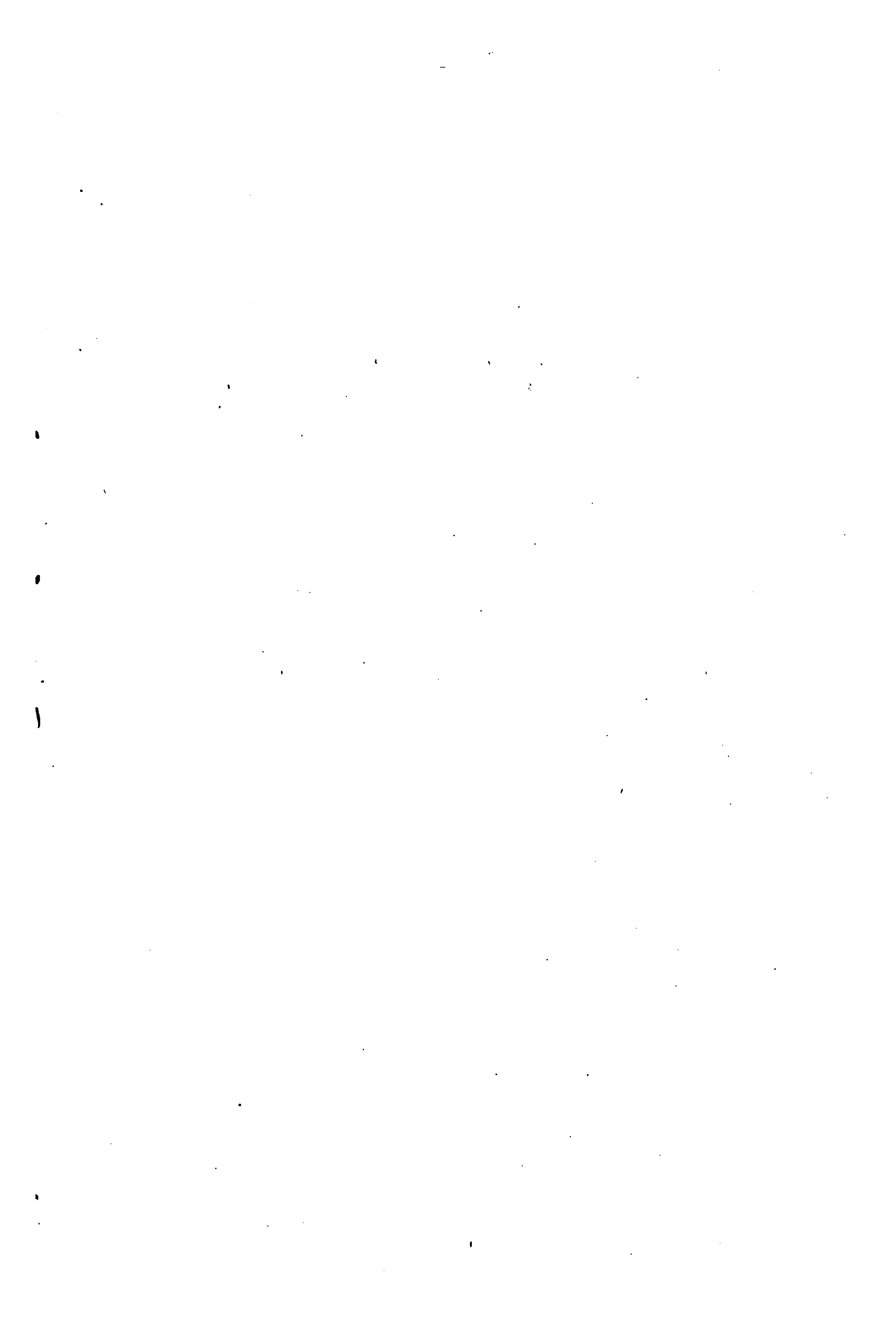



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
7 July 1897.





Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Integral in der Horizontfläche Unstetigkeiten zweiter Art besitzt.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doctorwürde
einer hohen philosophischen Facultät der Königl.
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von

August zur Kammer

aus Mellinghausen (Hannover).

Opponenten:

Herr Teege, Lehrer,
„ Karstens, Dr. phil.

KIEL.

Druck von P. Peters.

1895.

Nr. 4.
Rectoratsjahr 1895/96.
Imprimatur:
Dr. H. Oldenberg,
h. t. decanus.

Seiner lieben Schwester zugeeignet

vom Verfasser.

Es ist von Herrn Fuchs in der für die Theorie der linearen Differentialgleichungen grundlegenden Abhandlung

> „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coeffizienten" (Crelle's Journ., Bd. 66 und 68)

allgemein die Form derjenigen linearen Differentialgleichungen festgestellt, deren Integral die Unstetigkeiten 2ter Art entbehren. Soll bei allen partikulären Integralen in der Umgebung des Punktes $x = a$ diese Art von Unstetigkeit fehlen, so müssen die Koeffizienten in der Differentialgleichung folgendermassen beschaffen sein

$$(x-a)^n \frac{d^n y}{dx^n} + (x-a)^{n-1} P_1(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots$$

$$+ (x-a)\, P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x) . y = 0,$$

wo $P_1(x), P_2(x), \dots P_{n-1}(x), P_n(x)$ bei $x = a$ eindeutige und stetige Funktionen von x sind, oder wo für $P_k(x)$ die konvergente Entwicklung besteht

$$P_k(x) = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

Im Gebiete der grossen Werte von x oder in der Horizontfläche fehlen die Unstetigkeiten 2ter Art, wenn die lineare Differentialgleichung die Form hat

$$x^n \mathfrak{P}_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + x . \mathfrak{P}_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + \mathfrak{P}_n(x) . y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_k(x)$ in die konvergente Reihe

$$\mathfrak{P}_k(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

entwickelbar sein muss.

Nachdem Differentialgleichungen mit nur Unstetigkeiten erster Art vielfach behandelt waren, lag der Gedanke nahe, zur Integration von Differentialgleichungen zu schreiten, deren Integral, wenngleich in einfacher Weise, auch Unstetigkeiten 2ter Art zeigen. Dies ist auch bereits geschehen — lineare Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten, Tissot'sche Differentialgleichung und einige andere —; allein im grossen Ganzen ist dieses Gebiet wegen der sich darbietenden Schwierigkeiten noch wenig betreten. Im Folgenden soll nun eine derartige Differentialgleichung 4ter Ordnung von der Form

$$G_3(x)\frac{d^4y}{dx^4} - g_3(x)\frac{d^3y}{dx^3} + g_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} - g_1(x)\frac{dy}{dx} + g_0\, y = 0$$

integriert werden, deren Koeffizienten ganze Fanktionen vom Grade des Index sind. Der unendlich ferne Punkt ist für diese Differentialgleichung ein Unstetigkeitspunkt zweiter Art, oder, was dasselbe ist, das Integral in der Horizontfläche wird für $x = \infty$ von unendlich hoher Ordnung unendlich. Diese Differentialgleichung lässt sich, wenn die Konstanten in den Koeffizienten passend gewählt werden, durch das bestimmte Integral

$$y = \int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-1}\, \mathfrak{V}.dv$$

und durch die Substitution

$$\mathfrak{V} = v^{-(b_1+\lambda-1)} . V$$

in die Tissot'sche Differentialgleichung 3ter Ordnung für V, nämlich

$$\varphi(v)\frac{d^3V}{dv^3} - \left[(\lambda-3)_1\varphi'(v) + \psi(v)\right]\frac{d^2V}{dv^2} +$$

$$[(\lambda-2)_2\varphi''(v)+(\lambda-2)_1\psi'(v)]\frac{dV}{dv}-(\lambda-1)_2\psi''(v)V=0$$

überführen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass diese Differentialgleichung die beiden endlichen singulären Punkte 0 und 1 habe, dass also

$$\varphi(v)=v\,(v-1) \text{ und}$$
$$\psi\,(v)=\varphi\,(v).\left(1+\frac{b_1}{v}+\frac{b_2}{v-1}\right);$$

ausgeschrieben lautet sie dann

$$v\,(v-1)\,\frac{d^3V}{dv^3}-\left(v^2+(b_1+b_2+2\lambda-7)v-(b_1+\lambda-3)\right)\frac{d^2V}{dv^2}$$

$$+(\lambda-2)\,[2v+(b_1+b_2+\lambda-4)]\frac{dV}{dv}-(\lambda-1)(\lambda-2)V=0.$$

Die Tissot'sche Differentialgleichung ist von Herrn Pochhammer in Bd. 37 der Mathematischen Annalen behandelt und mit Hilfe bestimmter Integrale vollständig integriert worden. Auf diese Weise ergeben sich partikuläre Integrale der linearen Differentialgleichung 4. Ordnung als bestimmte Doppelintegrale, welche sich von einander nur durch die Grenzen unterscheiden, während die zu integrierende Funktion dieselbe bleibt.

Es handelt sich besonders darum, das vollständige System der Hauptlösungen oder der Hauptintegrale in der Umgebung der einzelnen singulären Punkte festzustellen. Auch wird es wichtig sein zu erfahren, ob diese Differentialgleichung die Eigenschaft mit der Tissot'schen gemeinsam hat, dass ihr eine transcendente ganze Funktion genügt, und ob vielleicht noch andere ähnliche Integrale vorhanden sind.

Man beachte, dass im allgemeinen bei dieser Klasse von linearen Differentialgleichungen die vollständige Integration derselben durch Reihen illusorisch wird; denn existieren bei $x=a$ Unstetigkeiten 2. Art, so kommen in der nach $(x-a)$ entwickelten Reihe, welche das allgemeine Integral bei $x=a$ vorstellt, nicht mehr eine endliche Anzahl negativer Exponenten von $(x-a)$ vor, und ebenso enthält, wenn $x=\infty$ ein Unstetigkeitspunkt zweiter

Art ist, die unendliche Reihe für das Integral in der Horizontfläche nicht mehr eine endliche Anzahl positiver Exponenten, vielmehr sind die fraglichen Reihen im allgemeinen unendliche Doppelreihen: es giebt dann keine Anfangsexponenten mehr, und die Koeffizienten der Reihe sind nicht weiter bestimmbar. Es ist daher die Anwendung von bestimmten Integralen zur Lösung dieser Art linearer Differentialgleichungen von ganz besonderer Bedeutung.

In § 1 reduzieren wir durch die genannten Substitutionen die zu integrierende lineare Differentialgleichung 4ter Ordnung auf die Tissot'sche Differentialgleichung 3ter Ordnung und stellen die definitive Form der ersteren fest; § 2 enthält die Hauptintegrale der Tissot'schen Differentialgleichung 3ter Ordnung; § 3 handelt von den Grenzen (g_1, h_1) und von den partikulären Integralen mit einfacher Begrenzung; im § 4 wird die Differentialgleichung durch Reihen zu integrieren versucht; § 5 giebt das System der Hauptintegrale und deren Reihenentwicklungen, und schliesslich § 6 enthält eine Zusammenfassung der vorhergehenden Betrachtungen.

Als Litteratur sind die einschlägigen Arbeiten von Herrn Pochhammer benützt, vor allem: Ueber die Tissot'sche Differentialgleichung, Mathem. Annalen, Bd. 37; über eine Klasse von Funktionen einer complexen Variabelen, welche die Form bestimmter Integrale haben, Crelle's Journal, Bd. 104; über eine Klasse von Integralen mit geschlossener Integrationscurve, Mathem. Annalen, Bd. 37; zur Theorie der Euler'schen Integrale, Mathem. Annalen, Bd. 35.

§ 1.

In die lineare Differentialgleichung 4ter Ordnung

$$(1)\quad G_3(x)\frac{d^4y}{dx^4}-g_3(x)\frac{d^3y}{dx^3}+g_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}-g_1(x)\frac{dy}{dx}+g_0.y=0,$$

in welcher $G_3(x)$, $g_3(x)$, $g_2(x)$, $g_1(x)$, $g_0(x)$ ganze Funktionen von x vom Grade 3, 3, 2, 1, 0 bedeuten, werde für y das bestimmte Integral

$$(2)\qquad y=\int_{g_1}^{h_1}(v-x)^{\varkappa-1}.\,\mathfrak{V}.dv$$

eingesetzt. Es soll die sonst beliebige Funktion $\mathfrak{V}$ von v allein abhängen, g_1 und $\varkappa$ bezeichnen Konstanten, und h_1 soll entweder auch konstant sein oder gleich x, in letzterem Falle hat man einstweilen $(\varkappa-4)$ im reellen Teile als positiv vorauszusetzen. Die Substitution dieses Wertes für y ergiebt, wenn wir die abkürzende Schreibweise

$[\varkappa]_\nu=\varkappa(\varkappa-1)\ .\ .\ .\ (\varkappa-\nu+1)=(\varkappa)_\nu\nu!$ gebrauchen:

$$\int_{g_1}^{h_1}(v-x)^{\varkappa-5}.\,\mathfrak{V}\Big\{[\varkappa-1]_4G_3(x)+[\varkappa-1]_3g_3(x).(v-x)$$
$$+[\varkappa-1]_2g_2(x).(v-x)^2+[\varkappa-1]_1g_1(x).(v-x)^3+g_0(x).(v-x)^4\Big\}dv=0$$

oder, bei Benützung des Taylor'schen Satzes,

$$\int_{g_1}^{h_1}(v-x)^{\varkappa-5}.\,\mathfrak{V}\Big\{[\varkappa-1]_4\left[G_3(v)-G_3'(v)\frac{v-x}{1}+G_3''(v).\frac{(v-x)^2}{1.2}-G_3'''(v)\frac{(v-x)^3}{1.2.3.}\right]$$
$$+[\varkappa-1]_3\left[g_3(v)-g_3'(v)\frac{v-x}{1}+g_3''(v)\frac{(v-x)^2}{1.2}-g_3'''(v)\frac{(v-x)^3}{1.2.3}\right](v-x)$$
$$+[\varkappa-1]_2\left[g_2(v)-g_2'(v)\frac{v-x}{1}+g_2''(v)\frac{(v-x)^2}{1.2}\right](v-x)^2$$
$$+[\varkappa-1]_1\left[g_1(v)-g_1'(v)\frac{v-x}{1}\right](v-x)^3$$
$$+g_0(v).(v-x)^4\Big\}dv=0.$$

Fassen wir nun die Glieder zusammen, welche gleich hohe Potenzen von (v— x) enthalten, so bekommen wir

$$\int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-5} . \mathfrak{B}.[\varkappa-1]_1 . G_3(v).dv$$

$$-\int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-4} . \mathfrak{B}.\Big[[\varkappa-1]_4 G_3'(v)-g_3(v)\Big].dv$$

$$+\int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-3} . \mathfrak{B}.\Big[[\varkappa-1]_4\frac{G_3''(v)}{1.2}-[\varkappa-1]_3\frac{g_3'(v)}{1}+[\varkappa-1]_2 g_2(v)\Big]dv$$

$$-\int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-2} . \mathfrak{B}.\Big[[\varkappa-1]_4\frac{G_3'''(v)}{1.2.3}-[\varkappa-1]_3\frac{g_2''(v)}{1.2}+[\varkappa-1]_2\frac{g_2'(v)}{1}$$

$$-[\varkappa-1]_1 g_1(v)\Big]dv$$

$$+\int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-1} . \mathfrak{B}.\Big[0-[\varkappa-1]_3\frac{g_3'''(v)}{1.2.3.}+[\varkappa-1]_2\frac{g_2''(v)}{1.2}-[\varkappa-1]_1\frac{g_1'(v)}{1}$$

$$+g_0(v)\Big]dv=0.$$

Wir suchen nun durch partielles Integrieren eine einzige Potenz von (v—x) unterm Integralzeichen zu erlangen. Da die fünf Potenzen $(v-x)^{\varkappa-5} \ldots (v-x)^{\varkappa-1}$ vorkommen, so würde dies erst durch viermalige partielle Integration zu bewerkstelligen sein: die Differentialgleichung für $\mathfrak{B}$ würde von der vierten Ordnung bleiben; verfügen wir aber über die Konstanten der noch näher zu bestimmenden Funktionen derart, dass

$$(3) \quad (\varkappa-1)_3\, g_3'''(v)-(\varkappa-1)_2 . g_2''(v)+(\varkappa-1)_1 . g_1'(v)-g_0(v)=0,$$

so kommen nur die vier Potenzen $(v-x)^{\varkappa-5} \ldots (v-x)^{\varkappa-2}$ vor, und es ist durch das angedeutete Verfahren eine Reduktion der ursprünglichen linearen Differenterialgleichung 4ter Ordnung auf eine solche der 3ten Ordnung möglich. Die obige Gleichung wird dann nach Division mit $(\varkappa-1)$

$$[\varkappa-2]_3 . \int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-5} . \mathfrak{B}.G_3(v).dv$$

$$-[\varkappa-2]_2 . \int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-4} . \mathfrak{B}.\left[(\varkappa-4)_1.G_3'(v)-g_3(v)\right]dv$$

$$+[\varkappa-2]_1 . \int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-3} . \mathfrak{B}.\left[(\varkappa-3)_2 G_3''(v)-(\varkappa-3)_1 g_3'(v)+g_2(v)\right]dv$$

$$-\int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-2} . \mathfrak{B}.\left[(\varkappa-2)_3 G_3'''(v)-(\varkappa-2)_2 g_3''(v)+(\varkappa-2)_1 g_2'(v)-g_1(v)\right]dv$$
$$=0.$$

Nun ist vermöge partieller Integration

$$[\varkappa-2]_3 . \int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-5} . \mathfrak{B}.G_3(v).dv=$$

$$\left[[\varkappa-2]_2 (v-x)^{\varkappa-4} . \mathfrak{B}.G_3(v)-[\varkappa-2]_1 (v-x)^{\varkappa-3} . \frac{d}{dv}\Big(\mathfrak{B}.G_3(v)\Big)\right.$$
$$\left.+(v-x)^{\varkappa-2} . \frac{d^2}{dv^2}\Big(\mathfrak{B}.G_3(v)\Big)\right]_{v=g_1}^{v=h_1}$$
$$-\int_{g_1} (v-x)^{\varkappa-2} . \frac{d^3}{dv^3}\Big(\mathfrak{B}.G_3(v)\Big).dv;$$

$$-[\varkappa-2]_2 . \int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-4} . \mathfrak{B}.\left[(\varkappa-4)_1 G_3'(v)-g_3(v)\right]dv=$$

$$\left[-[\varkappa-2]_1 .(v-x)^{\varkappa-3} . \mathfrak{B}.\left[(\varkappa-4)_1 G_3'(v)-g_3(v)\right]\right.$$
$$\left.+(v-x)^{\varkappa-2} . \frac{d}{dv}\Big(\mathfrak{B}.\left[(\varkappa-4)_1 G_3'(v)-g_3(v)\right]\Big)\right]_{v=g_1}^{v=h_1}$$
$$-\int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-2} . \frac{d^2}{dv^2}\Big(\mathfrak{B}.\left[(\varkappa-4)_1 G_3'(v)-g_3(v)\right]\Big)dv;$$

$$[\varkappa-2]_1 \int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-3} \,.\, \mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-3)_2 G_3''(v)-(\varkappa-3)_1 g_3'(v)+g_2(v)\Big]dv =$$

$$\Big[(v-x)^{\varkappa-2} \,.\, \mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-3)_2 G_3''(v)-(\varkappa-3)_1 g_3(v)+g_2(v)\Big]\Big]_{v=g_1}^{v=h_1}$$

$$-\int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-2} \,.\, \frac{d}{dv}\Big(\mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-3)_2 G_3''(v)-(\varkappa-3)_1 g_3(v)+g_2(v)\Big]\Big)dv.$$

Die Gleichung (4) gestattet deshalb folgende Umgestaltung

$$\Big[M_1\Big]_{v=g_1}^{v=h_1} - \int_{g_1}^{h_1} (v-x)^{\varkappa-2} \,.\, \Bigg\{\frac{d^3}{dv^3}\Big(\mathfrak{V}.G_3(v)\Big) + \frac{d^2}{dv^2}\Big(\mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-4)_1 G_3'(v)-g_3(v)\Big]\Big)$$

$$+\frac{d}{dv}\Big(\mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-3)_2 G_3''(v)-(\varkappa-3)_1 g_3'(v)+g_2(v)\Big]\Big)$$

$$+\mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-2)_3 G_3'''(v)-(\varkappa-2)_2 g_3''(v)+(\varkappa-2)_1 g_2'(v)-g_1(v)\Big]\Bigg\}dv = 0,$$

$$\text{wo } M_1 = [\varkappa-2]_2 (v-x)^{\varkappa-4} \,.\, \mathfrak{V}.G_3(v) - [\varkappa-2]_1 (v-x)^{\varkappa-3} \,.\, \frac{d}{dv}\Big(\mathfrak{V}.G_3(v)\Big)$$

$$+(v-x)^{\varkappa-2} \,.\, \frac{d^2}{dv^2}\Big(\mathfrak{V}.G_3(v)\Big) - [\varkappa-2]_1 (v-x)^{\varkappa-3} \,.\, \mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-4)_1 G_3'(v)-g_3(v)\Big]$$

$$+(v-x)^{\varkappa-2} \,.\, \frac{d}{dv}\Big(\mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-4)_1 G_3'(v)-g_3(v)\Big]\Big) \qquad (5)$$

$$+(v-x)^{\varkappa-2} \,.\, \mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-3)_2 G_3''(v)-(\varkappa-3)_1 g_3'(v)+g_2(v)\Big].$$

Bestimmen wir die bisher beliebige Funktion $\mathfrak{V}$ in der Art, dass sie der folgenden linearen Differentialgleichung dritter Ordnung Genüge leistet

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^3}{dv^3}\Big(\mathfrak{V}.G_3(v)\Big)+\frac{d^2}{dv^2}\Big(\mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-4)_1 G_3'(v)-g_3(v)\Big]\Big)\\&+\frac{d}{dv}\Big(\mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-3)_2 G_3''(v)-(\varkappa-3)_1 g_3'(v)+g_2(v)\Big]\Big)\\&+\mathfrak{V}.\Big[(\varkappa-2)_3 G_3'''(v)-(\varkappa-2)_2 g_3''(v)+(\varkappa-2)_1 g_2'(v)-g_1(v)\Big]\end{aligned}\right\}=0$$

oder, wie die weitere Ausführung der Differentiationen ergiebt,

$$G_3(v).\frac{d^3\mathfrak{B}}{dv^3}+\left[(\varkappa-1)_1 G_3'(v)-g_3(v)\right]\frac{d^2\mathfrak{B}}{dv^2}$$

$$+\left[(\varkappa-1)_2 G_3''(v)-(\varkappa-1)_1 g_3'(v)+g_2(v)\right]\frac{d\mathfrak{B}}{dv} \qquad (6)$$

$$+\left[(\varkappa-1)_3 G_3'''(v)-(\varkappa-1)_2 g_3''(v)+(\varkappa-1)_1 g_2'(v)-g_1(v)\right]\mathfrak{B}=0,$$

und genügen die Grenzen (g_1, h_1) der Bedingung, dass

$$\left[M_1\right]_{v=h_1}-\left[M_1\right]_{v=g_1}=0; \text{ so ist} \qquad (7)$$

$$y=\int_{g_1}^{h_1}(v-x)^{\varkappa-1}.\ \mathfrak{B}.\ dv \qquad (2)$$

eine Lösung der linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung

$$G_3(x).\frac{d^4y}{dx^4}-g_3(x).\frac{d^3y}{dx^3}+g_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}-g_1(x).\frac{dy}{dx}+g_0.y=0. \qquad (1)$$

Wenn es also gelingt, die lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung für $\mathfrak{B}$ zu integrieren oder sie mit einer bereits integrierten zu identifizieren, und zugleich die Grenzenbedingung (7) zu befriedigen, so giebt uns die Gleichung (2) partikuläre Integrale der Differentialgleichung (1).

Es liegt nun in unserer Absicht, die Differentialgleichung (6) auf die Form der Tissot'schen Differentialgleichung 3ter Ordnung zu bringen. Man beachte, dass die Koeffizienten der Differentialgleichung (6) sämtlich um einen Grad zu hoch sind, so dass wir sie mit denen der Tissot'schen Differentialgleichung nicht ohne weiteres identifizieren können; verbinden wir aber $\mathfrak{B}$ mit V durch die Relation

$$\mathfrak{V} = v^{-\mu} . V,$$

so ist es bei passender Wahl der Konstanten möglich, die Tissot'sche Differentialgleichung dritter Ordnung zu erhalten. Dasselbe wird bewirkt werden müssen, wenn wir auf diese Differentialgleichung die inverse Substitution

$$V = v^{\mu} . \mathfrak{V}$$

anwenden. Es zeigt sich, dass wir $\mu = b_1 + \lambda - 1$ zu nehmen haben, sowohl durch die wirkliche Ausrechnung, als auch sofort durch eine Argumentation, welche sich auf die Anfangsexponenten bezieht. Hätten wir den singulären Punkt 1 bevorzugt und

$$V = (v-1)^{\mu} . \mathfrak{V}$$

gesetzt, so müsste natürlich $\mu = b_2 + \lambda - 1$ genommen werden. Durch die Substitution

$$V = v^{b_1 + \lambda - 1} . \mathfrak{V} \tag{8}$$

transformiert sich die Tissot'sche Differentialgleichung 3ter Ordnung in die folgende

$$\begin{aligned} \varphi(v).v.\frac{d^3\mathfrak{V}}{dv} + \Big\{ 3[b_1+\lambda-1]_1 . \varphi(v) - \big[(\lambda-3)_1 \varphi'(v) + \psi(v)\big].v \Big\} \frac{d^2\mathfrak{V}}{dv^2} \\ + \Big\{ 3[b_1+\lambda-1]_2 \varphi(v).v^{-1} - 2[b_1+\lambda-1]_1 . \big[(\lambda-3)_1 \varphi'(v) + \psi(v)\big] \\ + \big[(\lambda-2)_2 \varphi''(v) + (\lambda-2)_1 \psi'(v)\big].v \Big\} \frac{d\mathfrak{V}}{dv} \\ + \Big\{ [b_1+\lambda-1]_3 \varphi(v).v^{-2} - [b_1+\lambda-1]_2 . \big[(\lambda-3)_1 \varphi'(v) \psi + (v)\big] v.^{-1} \\ + [b_1+\lambda-1]_1 . \big[(\lambda-2)_2 \varphi''(v) + (\lambda-2)_1 \psi'(v)\big] \\ - (\lambda-1)_2 \psi''(v) . v \Big\} \mathfrak{V} = 0. \end{aligned}$$

Bei der so getroffenen Wahl von μ fallen die Potenzen

von v mit negativem Exponenten heraus, so dass die Koeffizienten thatsächlich von dem erwünschten Grade sind. Die Differentialgleichung (6) stimmt mit der vorstehenden überein, wenn die Funktionen $G_3(v)$, $g_3(v)$, $g_2(v)$ und $g_1(v)$ folgendem Gleichungssysteme genügen:

$$G_3(v)=\varphi(v).v;$$
$$(\varkappa-1)_1 G_3'(v)-g_3(v)=3[b_1+\lambda-1]_1.\varphi(v)-\Big[(\lambda-3)_1\varphi'(v)+\psi(v)\Big].v;$$
$$(\varkappa-1)_2 G_3''(v)-(\varkappa-1)_1 g_3'(v)+g_2(v)=3[b_1+\lambda-1]_2.\varphi(v).v^{-1}$$
$$-2[b_1+\lambda-1]_1.\Big[(\lambda-3)_1\varphi'(v)+\psi(v)\Big]$$
$$+\Big[(\lambda-2)_2\varphi''(v)+(\lambda-2)_1\psi'(v)\Big].v;$$
$$(\varkappa-1)G_3'''(v)-(\varkappa-1)_2 g_3''(v)+(\varkappa-1)_1 g_2'(v)-g_1(v)=$$
$$[b_1+\lambda-1]_3\varphi(v)v^{-2}-[b_1+\lambda-1]_2.\Big[(\lambda-3)_1\varphi'(v)+\psi(v)\Big].v^{-1}$$
$$+[b_1+\lambda-1]_1.\Big[(\lambda-2)_2\varphi''(v)+(\lambda-2)_1\psi'(v)\Big]-(\lambda-1)_2\psi''(v).v.$$

Setzen wir für die beiden ganzen Funktionen zweiten Grades $\varphi(v)$ und $\psi(v)$ ihre Werte

$$\varphi(v)=v(v-1)$$
$$\psi(v)=\varphi(v).\left[1+\frac{b_1}{v}+\frac{b_2}{v-1}\right]$$

ein und lösen das Gleichungssystem nach den zu bestimmenden Funktionen auf, so erhalteu wir nach einigen Rechnungen:

$$G_3(v)=v^2(v-1);$$
$$g_3(v)=v[v^2+(-2b_1+b_2+3\varkappa-\lambda-7)v+2(b_1-\varkappa+\lambda+1)];$$
$$g_2(v)=(-2b_1+3\varkappa-5)v^2$$
$$+[b_1^2-2b_1b_2-(4\varkappa-\lambda-9)b_1+(2\varkappa-\lambda-2)b_2+3\varkappa^2-2\varkappa\lambda-11\varkappa$$
$$+5\lambda+8].v-(b_1-\varkappa+\lambda)\ (b_1-\varkappa+\lambda+1);$$
$$g_1(v)=(b_1-\varkappa+1)(b_1-3\varkappa+4).v+(b_1-\varkappa+1)(b_1-\varkappa+\lambda)(b_2+\varkappa-3).$$

Schliesslich führen wir noch zwei andere Konstanten a und b ein, welche mit b_1 und b_2 durch die Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{aligned} b_1-\varkappa&=a\\ b_2+\varkappa&=b\end{aligned}$$

verbunden sind; dann nehmen die obigen Ausdrücke eine etwas einfachere Gestalt an, nämlich:

$$G_3(v)=v^2(v-1); \tag{10}$$
$$g_3(v)=v\left[v^2+(b+\lambda-5)v-2(a+\lambda+1)(v-1)\right];$$
$$g_2(v)=(-2a+\varkappa-5)v^2-\left[(a+\lambda+1)(b+\lambda-5)+(a+1(b-3)\right]v$$
$$+(a+\lambda)(a+\lambda+1)(v-1);$$
$$g_1(v)=(a+1)(a-2\varkappa+4)v+(a+1)(a+\lambda)(b-3) \text{ und}$$
$$g_0(v)=(\varkappa-1)a(a+1) \text{ in folge der Gleichung (3).}$$

Die lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung

$$x^2(x-1)\frac{d^4y}{dx^4}-x\left[x^2+(b+\lambda-5)x-2(a+\lambda+1)(x-1)\right]\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+\Big((-2a+\varkappa-5)x^2-\left[(a+\lambda+1)(b+\lambda-5)+(a+1)(b-3)\right]x \tag{I}$$
$$+(a+\lambda)(a+\lambda+1)(x-1)\Big)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$-(a+1)\left[(a-2\varkappa+4)x+(a+\lambda)(b-3)\right]\frac{dy}{dx}+(\varkappa-1)a(a+1)y=0$$

geht also durch die Substitution

$$y=\int_{g_1}^{h_1}(v-x)^{\varkappa-1}\,.\,v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\,V\,.\,dv \tag{II}$$

in die Tissot'sche Differentialgleichung dritter Ordnung über

$$\varphi(v)\frac{d^3V}{dv^3}-\left[(\lambda-3)_1\varphi'(v)+\psi(v)\right]\frac{d^2V}{dv^2} \tag{11}$$
$$+\left[(\lambda-2)_2\varphi''(v)+(\lambda-2)_1\psi'(v)\right]\frac{dV}{dv}-(\lambda-1)_2\psi''(v)V=0,$$
$$\text{wo } \varphi(v)=v(v-1) \text{ und}$$
$$\psi(v)=\varphi(v)\left[1+\frac{a+\varkappa}{v}+\frac{b-\varkappa}{v-1}\right],$$

wenn die Grenzen (g_1, h_1) so gewählt werden, dass die Gleichung (7) befriedigt wird. Die Grösse M_1 hat den in Gleichung (5) angegebenen Wert, welchen man auch so schreiben kann:

$$M_1=[\varkappa-2]_2(v-x)^{\varkappa-4}\,.\,G_3(v)\,.\,\mathfrak{V}$$
$$-[\varkappa-2]_1(v-x)^{\varkappa-3}\,.\left\{G_3(v)\frac{d\mathfrak{V}}{dv}+\left[(\varkappa-3)G_3'(v)-g_3(v)\right]\mathfrak{V}\right\}$$
$$+\ (v-x)^{\varkappa-2}\,.\left\{G_3(v)\frac{d^2\mathfrak{V}}{dv^2}+\left[(\varkappa-2)G_3'(v)-g_3(v)\right]\frac{d\mathfrak{V}}{dv}\right.$$
$$\left.+\left[2(\varkappa-3)G_3''(v)-(\varkappa-2)g_3'(v)+g_2(v)\right]\mathfrak{V}\right\}$$

In diesem Aggregat sind für $G_3(v)$, $g_3(v)$ und $g_2(v)$ die in den Gleichungen (10) erwähnten Werte zu setzen; die Funktion $\mathfrak{V}$ ist mit V durch die Gleichung verknüpft

$$\mathfrak{V}=v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\,.\,V. \tag{12}$$

§ 2.

Die Tissot'sche Differentialgleichung (11) wird durch das bestimmte Integral

$$V=\int_g^h e^u\,u^{a+\varkappa-1}\,(u-1)^{b-\varkappa-1}\,(u-v)^{\lambda-1}\,du \tag{13}$$

befriedigt, wo (g, h) = o, 1. — ∞, v sein dürfen, wenn gewisse Ungleichheiten der Konstanten erfüllt sind. Herr Pochhammer giebt in der bereits erwähnten Abhandlung „Ueber die Tissot'sche Differentialgleichung" folgendes System der Hauptintegrale an.

$$V_1=\int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} e^u\,u^{a+\varkappa-1}\,(u-1)^{b-\varkappa-1}\,(u-v)^{\lambda-1}\,du \tag{14}$$

Der Integrationsweg dieses Integrals ist ein geschlossener: er kommt von $-\infty$ und geht, nach positiver Umkreisung der singulären Punkte v, o, 1 des Integranden, nach $-\infty$ zurück. V_1 ist in eine eindeutige, nach steigenden Potenzen von v fortschreitende Reihe entwickelbar, welche in der ganzen v-Ebene konvergiert; V_1 ist also eine transcendente ganze Funktion, sie ist ein Hauptintegral sowohl in der Umgebung der beiden end-

lichen singulären Punkte $v=0$ und $v=1$, als auch im Gebiete der grossen Werte von v. Ihre Reihenentwicklungen sind die folgenden

$$V_1=\overline{\Gamma}(a+b+\lambda-2)\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(\lambda-1)_\nu . v^\nu . F(1-b+\varkappa;\ \nu-a-b-\lambda+3;\ 1)}{[a+b+\lambda-3]_\nu}$$

oder (15)

$$V_1=e\overline{\Gamma}(a+b+\lambda-2)\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(\lambda-1)_\nu (v-1)^\nu . F(1-a-\varkappa;\ \nu-a-b-\lambda+3;-1)}{[a+b+\lambda-3]_\nu}$$

Das Symbol $\overline{\Gamma}(a)$ ist das erweiterte Euler'sche Integral zweiter Art oder das geschlossene Integral

$$\overline{\Gamma}(a)=\overline{\int_{-\infty}^{(o)}} e^u u^{a-1} du,$$

und das Funktionszeichen $F(\alpha;\ \varrho;\ x)$ bedeutet die transcendente ganze Funktion

$$F(\alpha;\varrho;x)=1+\frac{\alpha}{1.\varrho}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)}x^2+\ldots=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{[\alpha]^+_\nu}{\nu![\varrho]^+_\nu}x^\nu$$

Mit $E(p, q)$ werden wir das Euler'sche Integral erster Art bezeichnen:

$$E(p,q)=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du.$$

$$\overline{E}(p,q)=\overline{\int_0^{(1)}} u^{p-1}(u-1)^{q-1} du.$$

In der Horizontfläche existiert ein Hauptintegral, das für sich allein die Unstetigkeit zweiter Art entbehrt, nämlich

$$\zeta=\int_0^1 e^u u^{a+\varkappa-1}(u-1)^{b-\varkappa-1}(u-v)^{\lambda-1} du. \qquad (16)$$

Diese Funktion ist gleich dem Produkte aus $v^{\lambda-1}$ und einer konvergenten, nach fallenden Potenzen von v fortschreitenden Reihe; es ist

$$\zeta=(-1)^{b-\varkappa+\lambda} \cdot E(a+\varkappa, b-\varkappa) . v^{\lambda-1} .$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}(\lambda-1)_{\nu} . [a+\varkappa]_{\nu}^{+}}{[a+b]_{\nu}^{+}} v^{-\nu} . F(a+\varkappa+\nu;\; a+b+\nu;\; 1) \tag{17}$$

Das dritte Hauptintegral in diesem Gebiete ist

$$\omega=\overline{\int_{v}^{(0,1)}} e^{u} u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du \tag{18}$$

Das Integral ω besitzt Unstetigkeiten zweiter Art und nimmt den Faktor

$$e^{2\pi i(a+b+\lambda)}$$

auf, wenn die Variabele v die Verbindungslinie der Punkte o und 1 in positivem Sinne umkreist.

In der Umgebung der beiden endlichen singulären Punkte o und 1 existiert neben der transcendenten ganzen Funktion V_1 noch je ein eindeutiges Hauptintegral:

$$V^{(o)}=\overline{\int_{1}^{(v,o)}} e^{u} u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du,$$

$$V^{(1)}=\overline{\int_{0}^{(v,1)}} e^{u} u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du$$

Endlich ist für diese Bezirke je ein mehrdeutiges Hauptintegral vorhanden.

$$\eta^{(0)}=\int_0^v e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du,$$

$$\eta^{(1)}=\int_1^v e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du.$$

Die entsprechenden Reihen lauten folgendermassen

$$V^{(0)}=(-1)^{a+b+\lambda-2}.e.\overline{E}(b-\varkappa,a+\varkappa+\lambda-1). \tag{19}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^{\nu}(\lambda-1)_{\nu}\frac{[a+b+\lambda-2]_{\nu}}{[a+\varkappa+\lambda-2]_{\nu}}.v^{\nu}.\ F(b-\varkappa;a+b+\lambda-\nu-1;-1);$$

$$V^{(1)}=\overline{E}(a+\varkappa,b-\varkappa+\lambda-1). \tag{20}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(\lambda-1)_{\nu}\frac{[a+b+\lambda-2]_{\nu}}{[b-\varkappa+\lambda-2]_{\nu}}.(v-1)^{\nu}F(a+\varkappa;a+b+\lambda-\nu-1;1);$$

$$\eta^{(0)}=(-1)^{b-\varkappa+\lambda}.\ E(a+\varkappa,\lambda).v^{a+\varkappa+\lambda-1}.\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\gamma_{\nu}\frac{[a+\varkappa]^{+}_{\nu}}{[a+\varkappa+\lambda]^{+}_{\nu}}v^{\nu}; \tag{21}$$

$$\eta^{(1)}=(-1)^{\lambda-1}E(b-\varkappa,\lambda).(v-1)^{b-\varkappa+\lambda-1}.\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\delta_{\nu}\frac{[b-\varkappa]^{+}_{\nu}}{[b-\varkappa+\lambda]^{+}_{\nu}}(v-1)^{\nu}. \tag{22}$$

Hierbei ist noch der kürzeren Schreibweise wegen gesetzt:

$$\gamma_{\nu}=\frac{1}{\nu!}-\frac{(b-\varkappa-1)_1}{(\nu-1)!}+-\ \dots\ +(-1)^{\nu}(b-\varkappa-1)_{\nu}$$

$$\delta_{\nu}=\frac{1}{\nu!}+\frac{(a+\varkappa-1)_1}{(\nu-1)!}+\dots+\frac{(a+\varkappa-1)_{\nu-1}}{1}+(a+\varkappa-1)_{\nu}.$$

$$V=a_1.V_1+a_2.V^{(0)}+a_3.\eta^{(0)},$$

$$V=b_1.V_1+b_2.V^{(1)}+b_3.\eta^{(1)} \text{ und}$$

$$V=c_1.V_1+c_2.\zeta+c_3.\omega$$

ist mithin das allgemeine Integral der Tissot'schen Differentialgleichung dritter Ordnung (11) in dem Bezirke $v=0$, $v=1$ resp. $v=\infty$; a_1, a_2 . . . c_3 bedeuten willkührliche Konstanten.

§ 3.

Diskussion der Grenzen (g_1, h_1).

Der Grenzenbedingung (7) ist gewiss genügt, wenn

$$\Big[M_1\Big]_{v=g_1}=0 \text{ und } \Big[M_1\Big]_{v=h_1}=0.$$

Dies ist hinreichend, aber nicht notwendig; die eine Bedingung ist dadurch gleichsam in zwei gespalten. In diesem Falle sind g_1 und h_1 verschieden, und wir erhalten in bezug auf die Integrationsvariabele v bestimmte Integrale mit einfacher Begrenzung.

Zum andern kann der Grenzenbedingung durch gewisse Werte $v=g_1=h_1$ genügt werden; dann ergeben sich Integrale mit geschlossener Integrationskurve. In diesem Falle braucht M_1 für $v=g_1$ und $v=h_1$ nicht zu verschwinden, obwohl dies nicht ausgeschlossen ist, sondern es ist nur notwendig, dass M_1 für den Anfangs- und für den Endpunkt des Integrationsweges denselben Wert annimmt.

Für welche Werte von v ist M_1 gleich Null, wenn wir in M_1 die verschiedenen Hauptintegrale V resp. die entsprechenden Funktionen $\mathfrak{V}$ einsetzen? Um z. B. zu prüfen, ob M_1 für $v=0$ verschwindet, wenn $V=V_1$ gewählt wird, so entwickeln wir M_1 nach steigenden Potenzen von v; stellt sich dabei heraus, dass der Exponent der niedrigsten Potenz von v grösser als Null ist, so haben wir

$$\Big[M_1\Big]_{\substack{V=V_1\\ v=0}}=0,$$

andernfalls ist

$$\Big[M_1\Big]_{\substack{V=V_1\\ v=0.}} \gtrless 0.$$

Die Hauptintegrale V bei $v=o$ haben die Anfangsexponenten $o, o, a+\varkappa+\lambda-1$, die entsprechenden Funktionen $\mathfrak{B}$, infolge der Gleichung (12), $-(a+\varkappa+\lambda-1)$, $-(a+\varkappa+\lambda-1)$, o, Wählt man die eindeutigen Hauptintegrale V_1, $V^{(0)}$, so verschwindet M_1 für $v=o$, wenn der reelle Teil von $(a+\varkappa+\lambda-1)$ kleiner als Null ist, in Zeichen

$$\Re\,(a+\varkappa+\lambda-1) < o;$$

dagegen ist M_1 für $v=\infty$ von Null verschieden, wenn das mehrdeutige Hauptintegral $\eta^{(0)}$ genommen wird.

Die Hauptintegrale V in der Umgebung des Punktes $v=1$ haben die Anfangsexponenten o, o, $b-\varkappa+\lambda-1$; die korrespondierenden Funktionen $\mathfrak{B}$ haben in diesem Gebiete dieselben Anfangsexponenten. Es ist deshalb $M_1=o$, für $v=1$, wenn $V=\eta^{(1)}$ gewählt wird und wenn noch $\Re(b-\varkappa+\lambda-2)>o$; während $M_1 \gtrless o$ für $v=1$, falls man die eindeutigen Hauptintegrale bei $v=1$ nimmt.

Schliesslich bleibt nur noch das Integral ζ für V zu substituieren, da das Integral ω wegen der unendlichen Doppelreihe für diese Betrachtungen nicht anwendbar ist. Es ist

$$\Big[M_1\Big]_{\substack{V=\zeta \\ v=\pm\infty}} = o, \text{ wenn } \Re\,(a+2) > o.$$

In allen diesen Fällen kann noch für v der Wert x benützt werden, wenn der reelle Teil von $(\varkappa-4)$ grösser als Null ist.

Da wir uns von den Bedingungen über Ungleichheiten der Konstanten leicht befreien können, indem wir ähnliche Integrale mit geschlossener Integrationskurve event. mit Doppelumläufen einführen, so werden uns derartige Einschränkungen nicht weiter behindern.

Um von vornherein gewiss zu sein, dass wir ausser bei dem Integral ζ für (g_1, h_1) noch unendlich grosse Grenzen einführen dürfen, müssten wir das Verhalten der fraglichen Integrale im Unendlichen kennen. Dahingehende Untersuchungen werden aber auf grosse Schwierigkeiten stossen. Es ist wahrscheinlich, dass

die transcendente ganze Funktion V_1 die Eigenschaft besitzt, für ein unendlich grosses, negatives Argument zu verschwinden.

Bezeichnen wir der kürzeren Schreibweise wegen mit $\Phi(u,v,x)$ resp. Φ die Funktion

$$\Phi=(v-x)^{\varkappa-1} \cdot v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} \cdot e^{u} \cdot u^{a+\varkappa-1} \cdot (u-1)^{b-\varkappa-1} \cdot (u-x)^{\lambda-1}, \tag{23}$$

so genügen nach dem Vorhergehenden die folgenden Doppelintegrale der linearen Differentialgleichung (I):

$$\int_0^x dv \int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} \Phi du, \quad \int_0^x dv \int_1^{\overline{(v,o)}} \Phi du, \tag{24}$$

$$\int_1^x dv \int_1^v \Phi du \quad \text{und} \int_x^\infty dv \int_o^1 \Phi du$$

Die Konvergenz dieser Integrale wird natürlich vorausgesetzt. Die Bedingungen hierfür sind ähnlich den Ungleichheiten, die erfüllt sein müssen, damit M_1 für die betreffenden Integralgrenzen annulliert wird. Auch nehmen wir an, dass keine der Konstanten und auch keine additive oder subtraktive Verbindung derselben gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl ist, wodurch wir die logarithmischen Fälle der Differentialgleichung (I) ausschliessen.

Die beiden ersten der Integrale (24) sind mehrdeutige Hauptintegrale in der Umgebung des Punktes $x=o$, das dritte ist ein mehrdeutiges Hauptintegral im Bezirke $x=1$ und das letzte ist ein solches im Gebiete grosser Werte von x.

Dahingegen leisten die Doppelintegrale

$$\int_o^x dv \int_o^v \Phi du, \int_1^x dv \int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} \Phi du, \quad \int_1^x dv \int_o^{\overline{(v,1)}} \Phi du \tag{25}$$

der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung (I) nicht Genüge; wohl aber befriedigen sie gewisse nicht homogene lineare Differentialgleichungen, deren linke Seiten

mit (I) übereinstimmen und deren rechte Seite oder „zweites Glied“ die Gestalt const. $x^{\varkappa-2}$ resp. $c_1.(x-1)^{\varkappa-2}+c_2.(\varkappa-1)^{\varkappa-3}$ hat.

Um das vollständige System der Hauptintegrale von (I) in der Umgebung der einzelnen singulären Punkte $x=o$, $x=1$ und $x=\infty$ zu erhalten, ist es notwendig, auch in bezug auf die Integrationsvariabele v geschlossene Integrationswege zu benützen.

Zunächst wollen wir noch ein kleines Kapitel über die Integration der Differentialgleichung (I) durch Reihen einschalten.

§ 4.

In der Umgebnng von $x=o$ versuchen wir der vorgelegten Differentialgleichung (I) durch eine Reihe nach steigenden Potenzen von x zu genügen; zu dem Zwecke setzen wir

$$y=c_0x^{p}+c_1x^{p+1}+c_2x^{p+2}+c_3x^{p+3}+\ldots \text{ in inf.}$$

Führen wir diesen Wert von y in die Gleichung (I) ein, so ergiebt sich zur Bestimmung der Anfangsexponenten p die Gleichung vierten Grades

$$[p]_4+2(a+\lambda+1).[p]_3+(a+\lambda)(a+\lambda+1).[p]_2=0,$$

deren Wurzeln

$$p_1=o,\ p_2=1;\ p_3=-(a+\lambda-1), p_4=-(a+\lambda-1)+1 \text{ sind.} \qquad (29)$$

In den beiden Reihen

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_\nu x^\nu+\ldots \text{ und}$$

$$y=x^{-(a+\lambda-1)}\left\{c_0'+c_1'x+c_2'x^2+\ldots+c_\nu'x^\nu+\ldots\right\}$$

bleiben demgemäss c_0, c_1 und c_0', c_1' willkührlich, während c_2 durch c_0, c_1 und c_2' durch c_0', c_1' rational bestimmt ist, allgemein c_ν durch $c_{\nu-1}$, $c_{\nu-2}$ und c'_ν durch $c'_{\nu-1}$ $c'_{\nu-2}$. Das Gesetz dieser Verknüpfungen zu konstatieren und damit die Reihen selbst zu ermitteln, dürfte auf diesem Wege ein wenig umständlich sein.

Wollen wir der Differentialgleichung durch eine bei $x=1$ konvergente Reihe genügen, so machen wir den Ansatz

$$y = C_0(x-1)^q + C_1(x-1)^{q+1} + C_2(x-1)^{q+2} + \dots$$

Es ergiebt sich als Bestimmungsgleichung für q die biquadratische Gleichung

$$[q]_4 - (b+\lambda-4).[q]_3 = o,$$

welche die folgenden vier Wurzeln besitzt:

$$q_1 = o,\ q_2 = 1,\ q_3 = 2;\ q_4 = b+\lambda-1. \tag{27}$$

In der Reihe

$$y = C_0 + C_1(x-1) + C_2(x-1)^2 + C_3(x-1)^3 + \dots$$

bleiben deshalb C_0, C_1, C_2 beliebig und können daher transcendente Konstanten wesentlich verschiedener Art sein, jede der folgenden Konstanten ist rational durch diese drei bestimmt. Diesem entsprechend lässt sich bei den in Frage kommenden bestimmten Doppelintegralen eine lineare Relation zwischen je vier konstanten kontiguen Doppelintegralen aufstellen.
Dahingegen ist in der Reihe

$$y = (x-1)^{b+\lambda-1} . \{C'_0 + C'_1(x-1) + C'_2(x-1)^2 + \dots\}$$

nur C'_0 willkürlich, alle übrigen Konstanten sind durch diese eine bestimmt. Das Gesetz dieser Reihe wird demnach ein einfacheres sein

Im Gebiete der grossen Werte von x ist zwar im allgemeinen die vollständige Integration solcher Differentialgleichungen, die in der Horizontfläche Unstetigkeiten zweiter Art zeigen, mittelst Reihen nicht möglich, allein man wird durch dies Verfahren Integralfunktionen ausscheiden können, welche für sich die Unstetigkeit zweiter Art entbehren. Versuchen wir der vorgelegten Differentialgleichung durch eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$y = A_0 x^{r} + A_1 x^{r-1} + A_2 x^{r-2} + \dots$$

Genüge zu leisten, so ergiebt sich für r die kubische Gleichung

$$[r]_3 + (2a - \varkappa + 5)[r]_2 + (a+1)(a-2\varkappa+4)[r]_1 - (\varkappa - 1)a(a+1) = o,$$

welche die folgenden Werte zu Wurzeln hat

$$r_1 = \varkappa - 1;\ r_2 = -a,\ r_3 = -(a+1). \qquad (28)$$

Da die Existenz dieser Reihen hypothetisch ist, so ist hierdurch nur dargethan, dass, wenn eine oder mehrere solcher einfach unendlichen Reihen vorhanden sind, die der Differentialgleichung nicht nur formell genügen, sie einen dieser Anfangsexponenten haben müssen; es ist damit jedoch keineswegs bewiesen, dass drei derartige konvergente Reihen mit den Anfangsexponenten (28) existieren. In Wirklichkeit sind sie auch gar nicht vorhanden. Die Reihe

$$y = x^{\varkappa - 1} \cdot \left\{ A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \dots \right\}$$

ist divergent, wie sich leicht einsehen lässt, ähnlich wie

$$y = c.x^{-\alpha} \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha(\alpha-\varrho+1)}{1} \frac{1}{x} + \frac{\alpha(\alpha+1).(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2.\ \ x^2} - + \dots \right\}$$

die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Koeffizienten zwar formell befriedigt, aber divergent ist.
Auch die Reihe

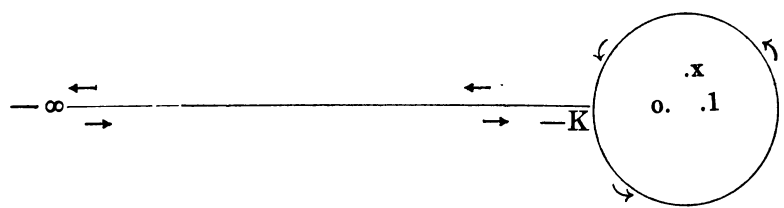
$$y = x^{-a} \cdot \left\{ A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \frac{A'_2}{x^2} + \dots \right\} \qquad (29)$$

ist divergent, wenn A'_0 und A'_1 beliebige Konstanten bleiben. Wir begegnen hier aber einer ganz ähnlichen Erscheinung, wie bei der Tissot'schen Differentialgleichung dritter Ordnung, worüber Herr Pochhammer Aufklärungen gegeben hat (l. c. pag. 528): in einem speciellen Falle stellt die Reihe (29) ein Hauptintegral in der Horizontfläche dar, nämlich

$$Z = \int_x^{\infty} dv \int_0^1 \Phi\, du.$$

§ 5.
Das System der Hauptintegrale.

In der Gleichung (II) werde für V die transcendente ganze Funktion V_1 gewählt. Als Grenzen nehmen wir $g_1 = h_1 = -\infty$; die geschlossene Integrationskurve v durchlaufe die negative reelle Axe bis zum Punkte $-K$, sodann die Peripherie eines Kreises in dessen Innern die Punkte o um 1 liegen, und schliesslich von $-K$ zurück nach $-\infty$. Der Kreis sei so gross, dass der Punkt x sich auf der Kreisfläche befinde und sowohl dem Punkte o als auch 1 näher liege, als irgend einem Punkte der Peripherie.



Dieses Doppelintegral Y_1 können wir kurz so schreiben

$$Y_1 = \overline{\int_{-\infty}^{(x,o,1)}} dv \overline{\int_{-\infty}^{(v,o,1)}} \Phi \, du \tag{30}$$

oder auch, da der Punkt 1 bei der nach v zu integrierenden Funktion kein singulärer ist,

$$Y_1 = \overline{\int_{-\infty}^{(x,o)}} dv \overline{\int_{-\infty}^{(v,o,1)}} \Phi \, du. \tag{30}$$

Sind bestimmte Anfangswerte der Potenzen des Integranden fixiert, so ist leicht einzusehen, dass Y_1 eine eindeutige Funktion von x ist; denn führt x innerhalb der fraglichen Kreisfläche einen Umlauf um den Punkt o aus, so wird dabei kein Punkt der Integrationskurve umkreist Auch bleibt die zu integrierende Funktion ungeändert, wenn x den Punkt 1 oder beide Punkte o und 1 zugleich umkreist. Das Doppelintegral Y_1 ist, wenn es für ein endliches x endlich und stetig bleibt, eine transcendente

ganze Funktion von x. Wir sind freilich auch noch nicht sicher, ob für $g_1 = h_1 = -\infty$ die Grenzenbedingung (7) erfüllt ist, und ob also die Funktion Y_1 die Differentialgleichung (I) befriedigt. Wir werden dies auf einem Umwege oder gleichsam a posteriori nachweisen.

Um Y_1 in eine Potenzreihe von x resp. (x—1) zu entwickeln, setzen wir für $(v-x)^{\varkappa-1}$ die Reihe

$$(v-x)^{\varkappa-1} = v^{\varkappa-1} \cdot \left\{1-(\varkappa-1)_1 \frac{x}{v} + - \ldots + (-1)^\nu (\varkappa-1)_\nu \left(\frac{x}{v}\right)^\nu + \ldots\right\}$$

resp.

$$(v-x)^{\varkappa-1} = (v-1)^{\varkappa-1} \cdot \left\{1-(\varkappa-1)_1 \frac{x-1}{v-1} + - \ldots (-1)^\nu (\varkappa-1)_\nu \left(\frac{x-1}{v-1}\right)^\nu + \ldots\right\}$$

Beide Entwicklungen sind konvergent, da nach den obigen Bestimmungen des Integrationsweges sowohl

$$\text{mod } x < \text{mod } v, \text{ wie auch}$$
$$\text{mod } (x-1) < \text{mod } (v-1) \text{ ist.}$$

Wir erhalten auf diese Weise für Y_1 die Reihenentwicklungen

$$Y_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu (\varkappa-1)_\nu \cdot K_\nu \cdot x^\nu, \text{ bezw.}$$

$$Y_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu (\varkappa-1)_\nu \cdot \mathfrak{K}_\nu \cdot (x-1)^\nu,$$

wo K_ν und $\mathfrak{K}_\nu$ die konstanten Doppelintegrale bedeuten:

$$K_\nu = \int_{-\infty}^{(0)} v^{-(a+\lambda+\nu)} dv \int_{-\infty}^{(v,0,1)} e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du,$$

(32)

$$\mathfrak{K}_\nu = \int_{-\infty}^{(0,1)} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} (v-1)^{\varkappa-\nu-1} dv \int_{-\infty}^{(v,0,1)} e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du.$$

Zwischen drei kontiguen Doppelintegralen $K_{\nu-2}$, $K_{\nu-1}$, K_ν existiert eine lineare Relation, die wir sogleich herleiten wollen, während solches erst zwischen je vier kontiguen Doppelintegralen $\mathfrak{K}_\nu$ statt hat. Unter der Voraussetzung, dass Y_1 der Differentialgleichung (I) genügt, ist nach Gleichung (4):

$$[\varkappa-2]_3 \int_{-\infty}^{(x,o)} (v-x)^{\varkappa-5} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} G_3(v) dv \int_{-\infty}^{(v,o,1)} e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du$$

$$-[\varkappa-2]_2 \int_{-\infty}^{(x,o)} (v-x)^{\varkappa-4} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} \Big[(\varkappa-4)_1 G_3'(v) - g_3(v)\Big] dv \int_{-\infty}^{(v,o,1)} \text{,,} \, du$$

$$+[\varkappa-2]_1 \int_{-\infty}^{(x,o)} (v-x)^{\varkappa-3} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} \Big[(\varkappa-3)_2 G_3''(v) - (\varkappa-3)_1 g_3'(v) + g_2(v)\Big] dv$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{(v,o,1)} e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du$$

$$-\int_{-\infty}^{(x,o)} (v-x)^{\varkappa-2} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} \cdot$$

$$\Big[(\varkappa-2)_3 G_3'''(v) - (\varkappa-2)_2 g_3''(v) + (\varkappa-2)_1 g_2'(v) - g_1(v)\Big] dv \int_{-\infty}^{(v,o,1)} \text{,,} \, du = 0.$$

Schreiben wir diese vier Integrale als eins, und setzen wir für $(v-x)^{\varkappa-5} \ldots (v-x)^{\varkappa-2}$ die konvergenten Entwicklungen

$$(v-x)^{\varkappa-5} = v^{\varkappa-5} \cdot \left\{1 - (\varkappa-5)_1 \frac{x}{v} + - \ldots + (-1)^\nu (\varkappa-5)_\nu \left(\frac{x}{v}\right)^\nu + \ldots \right\}$$

. . . .

$$(v-x)^{\varkappa-2} = v^{\varkappa-2} \cdot \left\{1 - (\varkappa-2)_1 \frac{x}{v} + - \ldots + (-1)^\nu (\varkappa-2)_\nu \left(\frac{x}{v}\right)^\nu + \ldots \right\};$$

so ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu x^\nu \int_{-\infty}^{(o)} v^{-(a+\lambda+\nu+2)} G_2(v) dv \int_{-\infty}^{(v,o,1)} e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du = 0.$$

Der Faktor $G_2(v)$ der zu integrierenden Funktion ist eine ganze Funktion zweiten Grades von v und zwar ist

$$
\begin{aligned}
G_2(v) = v^{-2}\,.[\varkappa-\nu-2]_3 . G_3(v) - v^{-1}[\varkappa-\nu-2]_2 . \left[(\varkappa-4)_1 G_3'(v) - g_3(v) \right] \\
+ [\varkappa-\nu-2]_1 . \left[(\varkappa-3)_2 G_3''(v) - (\varkappa-3)_1 g_3'(v) + g_2(v) \right] \\
- v \,. \left[(\varkappa-2)_3 G_3'''(v) - (\varkappa-2)_2 g_3''(v) + (\varkappa-2)_1 g_2'(v) - g_1(v) \right].
\end{aligned}
$$

Durch Annullierung der Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x ergiebt sich deshalb eine Relation zwischen je drei konstanten kontiguen Doppelintegralen, welche mit den definierten Doppelintegralen K_ν übereinstimmen:

$$
\begin{aligned}
& a(a+1)\,K_0 + (a+1)(a+\lambda)(b-3)K_1 - (a+\lambda)(a+\lambda+1)(\varkappa-2)K_2 = 0 \\
& (a+1)(a+2)K_1 + (a+2)(a+\lambda+1)(b-4)K_2 \\
(33) \quad & \qquad - (a+\lambda+1)(a+\lambda+2)(\varkappa-3)K_3 = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (a+\nu-2)(a+\nu-1)K_{\nu-2} + (a+\nu-1)(a+\lambda+\nu-2)(b-\nu-1)K_{\nu-1} \\
& \qquad - (a+\lambda+\nu-2)(a+\lambda+\nu-1)(\varkappa-\nu)K_\nu = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Integrieren wir anderseits die vorgelegte Differentialgleichung (1) direkt durch die folgende Reihe (34)

$$
y = c_0 - (\varkappa-1)_1 c_1 x + (\varkappa-1)_2 c_2 x^2 - + \ldots + (-1)^\nu (\varkappa-1)_\nu c_\nu x^\nu + \ldots ,
$$

so zeigt sich, dass die Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_{\nu-2}, c_{\nu-1}, c_\nu \ldots$ durch ganz dieselben Bedingungen mit einander verknüpft sind, wie die Doppelintegrale K_ν, nämlich

$$
\begin{aligned}
& a(a+1)c_0 + (a+1)(a+\lambda)(b-3)c_1 - (a+\lambda)(a+\lambda+1)(\varkappa-2)c_2 = 0 \\
& (a+1)(a+2)c_1 + (a+2)(a+\lambda+1)(b-4)c_2 \\
& \qquad - (a+\lambda+1)(a+\lambda+2)(\varkappa-3)c_3 = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (a+\nu-2)(a+\nu-1)c_{\nu-2} + (a+\nu-1)(a+\lambda+\nu-2)(b-\nu-1)c_{\nu-1} \\
(35) \quad & \qquad - (a+\lambda+\nu-2)(a+\lambda+\nu-1)(\varkappa-\nu)c_\nu = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

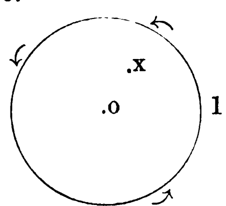
Die Konstanten c_0 und c_1 sind willkürlich. Durch Specialisierung derselben können wir jetzt nachträglich beweisen, dass die Funktion Y_1 die Differentialgleichung (I) befriedigt, und dass sie konvergiert; denn wählen wir

$$c_0 = K_0 \text{ und } c_1 = K_1,$$

so stimmt die Potenzreihe für Y_1, nämlich (31), vollständig mit der Reihe (34) überein, von der wir wissen, dass sie auf dem Einheitskreise konvergent ist und dass sie der Differentialgleichung (I) genügt. Mithin ist das Doppelintegral Y_1 ein Hauptintegral in der Umgebung des Punktes $x=o$ und, da es eine transcendente ganze Funktion von x ist, auch im Bezirke $x=1$ und im Gebiete der grossen Werte von x. Die Reihenentwicklung, welche Y_1 in der Umgebung von $x=1$ besitzt, ist in Gleichung (31) angedeutet.

In dem Doppelintegral Y_1 spielt die Funktion V_1 dieselbe Rolle, wie in dem Integral V_1 selbst die Exponentialfunktion e^u: sie bewirken die Konvergenz der Integrale für die unendlich entfernten Teile des Integrationsweges.

Eine zweite eindeutige Lösung im Bezirke $x=o$ erhält man, wenn man in Gleichung (II) für V das Integral der Tissot'schen Differentialgleichung $\eta^{(1)}$ und als Integrationsweg für v eine bei 1 beginnende und endigende Kurve wählt, die den Punkt x und o umschliesst, beispielsweise die Peripherie des Kreises durch 1 mit dem Mittelpunkte o.



Die Grenzenbedingung wird hierdurch erfüllt. Für dieses Doppelintegral $y^{(0)}$ haben wir die abgekürzte Schreibweise

$$y^{(0)} = \overline{\int_1^{(x,o)}} dv \int_1^v \Phi \, du; \tag{36}$$

$y^{(0)}$ ist eine eindeutige Funktion von x, denn wenn x einen Umlauf um den Punkt o ausführt, so wird dadurch die zu integrierende Funktion nicht geändert; $y^{(0)}$ ist aber bei $x=o$ auch eine endliche und stetige Funktion, da der Integrand endlich und stetig bleibt, und der Integrationsweg eine endliche Länge hat. Man kann, da

$$\mathrm{mod}\ x < \mathrm{mod}\ v$$

vorausgesetzt werden darf, die Potenz $(v-x)^{\varkappa-1}$ nach dem binomischen Satze in die konvergente Reihe entwickeln

$$(v-x)^{\varkappa-1} = v^{\varkappa-1}\left\{1-(\varkappa-1)_1\frac{x}{v}+-\ldots+(-1)^n(\varkappa-1)_n\left(\frac{x}{v}\right)^n+\ldots\right\}$$

Hierdurch erhalten wir für $y^{(0)}$ die Reihenentwicklung

$$y^{(0)} = \sum_{n=o}^{n=\infty}(-1)^n(\varkappa-1)_n Q_{n,\nu}\, x^n, \text{ wo}$$

$$Q_{n,\nu} = \overline{\int_1^{(0)}} v^{-(a+\lambda+n)} dv \int_1^v e^u u^{a+\varkappa-1}(u-1)^{b-\varkappa-1}(u-v)^{\lambda-1} du$$

oder in folge der Gleichung (22):

$$Q_{n,\nu} = (-1)^{\lambda-1} E(b-\varkappa,\lambda) \sum_{\nu=o}^{\nu=\infty} \delta_\nu \frac{[b-\varkappa]^+_\nu}{[b-\varkappa+\lambda]^+_\nu} q_{n,\nu},$$

wenn $q_{n,\nu}$ das konstante Integral bezeichnet

$$q_{n,\nu} = \overline{\int_1^{(0)}} v^{-(a+\lambda+n)}(v-1)^{b-\varkappa+\lambda+\nu-1} dv.$$

Nun ist (s. Pochhammer, zur Theorie der Euler'schen Integrale, Math. Annalen, Bd. 35, pag. 511 und 513)

$$\overline{E}(p,q) = \overline{\int_0^{(1)}} v^{p-1}(v-1)^{q-1} dv = e^{-\pi i q} \overline{\int_1^{(0)}} w^{q-1}(1-w)^{p-1} dw.$$

und es bestehen die Rekursionsformeln:

$$\overline{E}(p+m,q)=\frac{[p]_m^+}{[p+q]_m^+}\overline{E}(p,q),$$

$$\overline{E}(p,q+m)=(-1)^m\frac{[p]_m^+}{[p+q]_m^+}\overline{E}(p,q) \text{ und}$$

$$\overline{E}(p,q-m)=(-1)^m\frac{[p+q]_m}{[q]_m}\overline{E}(p,q).$$

Folglich ist

$$q_{n,\nu}=(-1)^{-a+b-\varkappa-n+\nu}\overline{E}(b-\varkappa+\lambda+\nu,-(a+\lambda-1)-n),$$

$$=(-1)^{-a+b-\varkappa-n+\nu}\frac{[b-\varkappa+\lambda]_\nu^+}{[-a+b-\varkappa-n+1]_\nu^+}\overline{E}(b-\varkappa+\lambda,-(a+\lambda-1)-n)$$

$$=(-1)^{-a+b-\varkappa+\lambda}\frac{[b-\varkappa+\lambda]_\nu^+}{[-a+b-\varkappa-n+1]_\nu^+}\frac{[-a+b-\varkappa]_n}{[-(a+\lambda)]_n}$$
$$\overline{E}\big(b-\varkappa+\lambda,-(a+\lambda-1)\big);$$

infolge dessen ist

$$Q_{n,\nu}=(-1)^{-a+b-\varkappa+\lambda-1}E(b-\varkappa,\lambda)\,\overline{E}\big(b-\varkappa+\lambda,-(a+\lambda-1)\big).$$

$$\cdot\sum_{\nu=\infty}^{\nu=\infty}(-1)^\nu\delta_\nu\frac{[b-\varkappa]_\nu^+}{[-a+b-\varkappa-n+1]_\nu^+}\cdot\frac{[-a+b-\varkappa]_n}{[-(a+\lambda)]_n};$$

und schliesslich erhalten wir für $y^{(o)}$ die Doppelsumme

$$y^{(o)}=(-1)^{-a+b-\varkappa+\lambda-1}E(b-\varkappa,\lambda).\overline{E}\big(b-\varkappa+\lambda,-(a+\lambda-1)\big)$$

(37) $$\cdot\sum_{n=o}^{n=\infty}\sum_{\nu=o}^{\nu=\infty}(-1)^{n+\nu}(\varkappa-1)_n\,\delta_\nu\cdot\frac{[-a+b-\varkappa]_n}{[-(a+\lambda)]_n}\frac{[b-\varkappa]_\nu^+}{[-a+b-\varkappa-n+1]_\nu^+}x^n.$$

Die Summation über ν ist zuerst, die über n zuletzt auszuführen.

Unter den Integralen (24) sind bereits die mehrdeutigen Hauptintegrale in der Umgebung des Punktes $x=o$ vorhanden. Das Doppelintegral

$$Y_2 = \int_0^x dv \overline{\int_{-\infty}^{(v,o,1)}} \Phi\, du \qquad (38)$$

ist ein Produkt aus $x^{-(a+\lambda)}$ und einer bei $x=o$ eindeutigen Funktion — S. Pochhammer, Ueber gewisse Funktionen einer komplexen Variabelen, welche die Form bestimmter Integrale haben; Crelle's Journal, Bd. 104, pag. 168 —. Wir werden die bemerkenswerte Eigenschaft von der Funktion Y_2 nachweisen, dass sie gleich einem Produkte aus der Potenz $x^{-(a+\lambda-1)}$ und einer transcendenten ganzen Funktion von x ist. Es möge angenommen werden, dass die Konstanten die Ungleicheiten befriedigen

$$\Re(\varkappa) > o \text{ und } \Re\big(2-(a+\varkappa+\lambda)\big) > 0$$

oder, beide Ungleichkeiten zusammengefasst,

$$\Re\big(2-(a+\lambda)\big) > \Re(\varkappa) > 0,$$

sodass das Doppelintegral konvergiert. Ist die eine oder sind beide Bedingungen nicht erfüllt, so tritt an stelle des obigen Doppelintegrals mit einfacher Begrenzung in Bezug auf v ein Doppelintegral mit geschlossener Integrationskurve resp. mit Doppelumläufen um die Punkte x und o.

Setzen wir für $(u-v)^{\lambda-1}$ die konvergente Binomialreihe

$$(u-v)^{\lambda-1} = u^{\lambda-1} \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} (\lambda-1)_{\nu} \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^{\nu},$$

so transformiert sich das Doppelintegral Y_2 durch die Substitution

$$v = \mathfrak{v} . x$$

in die unendliche Summe

$$Y_2 = x^{-(a+\lambda-1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} (\lambda-1)_{\nu} L_{\nu}\, x^{\nu}, \text{ wo}$$

$$L_\nu = \int_0^1 \mathfrak{v}^{\nu-(a+\varkappa+\lambda-1)} (\mathfrak{v}-1)^{\varkappa-1} d\mathfrak{v}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{(0,1)} e^u u^{a+\varkappa+\lambda-\nu-2} (u-1)^{b-\varkappa-1} du$$

L_ν ist das Produkt zweier konstanter Integrale. Nun ist

$$\int_{-\infty}^{(0,1)} e^u u^{a+\varkappa+\lambda-\nu-2} (u-1)^{b-\varkappa-1} du =$$

$$(-1)^\nu \, \overline{\Gamma}(a+b+\lambda-2). \frac{F(1-b+\varkappa;\nu-a-b-\lambda+3;1)}{[a+b+\lambda-3]_\nu}$$

(S. Math Ann., Bd. 37 pag 523); ferner ist der andere Faktor

$$\int_0^1 \mathfrak{v}^{\nu-(a+\varkappa+\lambda-1)} (\mathfrak{v}-1)^{\varkappa-1} d\mathfrak{v} = (-1).^{\varkappa-1} E\big(\nu+2-(a+\lambda),\varkappa\big)$$

$$= (-1)^{\varkappa-1} \cdot \frac{[2-(a+\varkappa+\lambda)]^+_\nu}{[2-(a+\lambda)]^+_\nu} E\big(2-(a+\varkappa+\lambda),\varkappa\big),$$

da $E(p+m,q) = \frac{[p]^+_m}{[p+q]^+_m} E(p,q)$ ist. Durch Einsetzung dieser Werte erhalten wir für L_ν die Gleichung

$$L_\nu = (-1)^{\varkappa-1} \frac{[2-(a+\varkappa+\lambda)]^+_\nu}{[2-(a+\lambda)]^+_\nu} E\big(2-(a+\varkappa+\lambda),\varkappa\big)$$

$$(-1)^\nu \, \overline{\Gamma}(a+b+\lambda-2) \frac{F(1-b+\varkappa;\nu-a-b-\lambda+3;1)}{[a+b+\lambda-3]_\nu}$$

Demnach ergiebt sich für Y_2 die Reihenentwicklung

$$Y_2 = C.x^{-(a+\lambda-1)}$$

$$(39) \qquad \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (\lambda-1)_\nu \frac{[-(a+\varkappa+\lambda)]^+_\nu}{[2-(a+\lambda)]^+_\nu} \frac{F(1-b+\varkappa;\nu-a-b-\lambda+3;1)}{[a+b+\lambda-3]_\nu} x^\nu,$$

wo $C=(-1)^{\varkappa-1} E(2-(a+\varkappa+\lambda),\varkappa)\Gamma(a+b+\lambda-2)$.

Es ist zu beweisen, dass der Faktor von $C.\, x^{-(a+\lambda-1)}$ eine transcendente ganze Funktion ist, oder dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=x}(\lambda-1)_\nu \frac{[2-(a+\varkappa+\lambda)]_\nu^+}{[2-(a+\lambda)]_\nu^+} \frac{F(1-b+\varkappa;\, \nu-a-b-\lambda+3;\, 1)}{[a+b+\lambda-3]_\nu} x^\nu$$

für jeden endlichen Wert von x konvergiert. Der Beweis ist durch den Umstand erheblich erleichtert, dass diese Reihe bis auf den Faktor

$$\frac{[2-(a+\varkappa+\lambda)]_\nu^+}{[2-(a+\lambda)]_\nu^+}$$

eines jeden Gliedes mit der transcendenten ganzen Funktion

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(\lambda-1)_\nu \frac{F(1-b+\varkappa;\, \nu-a-b-\lambda+3;\, 1)}{[a+b+\lambda-3]_\nu} x^\nu$$

übereinstimmt (cf. Gleichung (15) und Math. Ann. Bd. 37, pag. 530). Wegen der Voraussetzung $\Re\,(\varkappa) > 0$ ist für reelle Werte der Konstanten

$$\frac{2-(a+\lambda)-\varkappa}{2-(a+\lambda)} < 1$$

$$\frac{2-(a+\lambda)-\varkappa+1}{2-(a+\lambda)+1} < 1$$

. . . .

$$\frac{2-(a+\lambda)-\varkappa+\nu-1}{2-(a+\lambda)+\nu-1} < 1$$

. . . .

Mithin ist der Faktor

$$\frac{[2-(a+\lambda)-\varkappa]_\nu^+}{[2-(a+\lambda)]_\nu^+} < 1.$$

Da sämtliche Glieder der unendlichen Reihe für die transcendente ganze Funktion V_1 von einem bestimmten fern genug liegenden Gliede ab alle positiv sind, so erhalten wir, wenn jedes Glied dieser Reihe mit einem Faktor multipliziert wird, der kleiner als die Einheit ist oder sich der Einheit als Grenze von unten her nähert, wiederum eine transcendente ganze Funktion.

Im Falle komplexer Werte der Konstanten werde

$$\Re\big(2-(a+\lambda)\big) < \text{mod}\ \big(2-(a+\lambda+\varkappa)\big)$$

vorausgesetzt, dann ist (cf. l. c. pag. 530)

$$\text{mod}\ \frac{\big[2-(a+\lambda+\varkappa)\big]_\nu^+}{\big[2-(a+\lambda)\big]_\nu^+} < 1, \text{ und}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(\lambda-1)_\nu \frac{\big[2-(a+\varkappa+\lambda)\big]_\nu^+}{\big[2-(a+\lambda)\big]_\nu^+} \frac{F(1-b+\varkappa;\ \nu-a-b-\lambda+3;\ 1)}{[a+b+\lambda-3]_\nu} x^\nu$$

ist aus den erwähnten Gründen eine transcendente ganze Funktion.

Das bei $x=0$ mehrdeutige Hauptintegral

$$Y_2 = \int_0^x dv \int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} \Phi\, du$$

ist also, wenn wir die obigen Voraussetzungen in Bezug auf die Konstanten machen, das Produkt aus der Potenz $x^{-(a+\lambda-1}$ und einer transcendenten ganzen Funktion von x. Es ist daher Y_2 auch ein Hauptintegral im Bezirke des Punktes $x=1$.

Wenden wir auf die Differenterialgleichung (I) die Substitution

$$y = x^{-(a+\lambda-1)}.\eta \tag{40}$$

an und führen zugleich folgende neue Konstanten ein

$$\begin{aligned} a' &= -(\lambda-1) \\ b' &= a+b+\lambda-1 \\ \varkappa' &= a+\varkappa+\lambda-1 \\ \lambda' &= -(a-1) \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist,

$$
\begin{aligned}
a &= -(\lambda'-1) \\
b &= a'+b'+\lambda'-1 \\
\varkappa &= a'+\varkappa'+\lambda'-1 \\
\lambda &= -(a'-1);
\end{aligned}
\tag{41}
$$

so geht dieselbe in eine Differentialgleichung für η von ganz derselben Form über, nämlich

$$
\begin{aligned}
&x^2(x-1)\frac{d^4\eta}{dx^4} - x\Big[x^2+(b'+\lambda'-5)x-2(a'+\lambda'+1)(x-1)\Big]\frac{d^3\eta}{dx^3} \\
&\quad+\Big[(-2a'+\varkappa'-5)x^2-[(a'+\lambda'+1)(b'+\lambda'-5)+(a'+1)(b'-3)]x \\
&\qquad\qquad+(a'+\lambda')(a'+\lambda'+1)(x-1)\Big]\frac{d^2\eta}{dx^2} \\
&\qquad\qquad-(a'+1)\Big[(a'-2\varkappa'+4)x+(a'+\lambda')(b'-3)\Big]\frac{d\eta}{dx} \\
&\qquad\qquad+(\varkappa'-1)a'(a'+1)\;\eta = 0.
\end{aligned}
\tag{I*}
$$

Die Differentialgleichung (I*) ist der Differentialgleichung (I) durch die Substitution (40) zugeordnet; sie besitzen die beachtenswerte Eigenschaft, dass sie durch einfache Konstantenvertauschung in einander übergehen:

(I)	(I*)
a	a'
b	b'
$\varkappa$	$\varkappa'$
λ	λ'

(42)

Diese Konstanten sind durch die Gleichungen (41) mit einander verknüpft.

Wenn daher der Differentialgleichung (I) eine eindeutige, transcendente ganze Funktion genügt, so muss die Differentialgleichung (I*) eine Funktion befriedigen, die das Produkt aus der Potenz $x^{a+\lambda-1}$ und einer transcendenten ganzen Funktion ist;

und wenn die Differentialgleichung (I) ein Integral besitzt, welches das Produkt aus $x^{-(a+\lambda-1)}$ und einer transcendenten ganzen Funktion ist, so muss es eine eindeutige, transcendente ganze Funktion geben, welche der Differentialgleichung (I*) Genüge leistet, infolge der Gleichung (40). In der That entspricht auch nach Gl. (41) und (42) dem Anfangsexponenten $-(a+\lambda-1)$ bei (I) der Anfangsexponent

$$-(a'+\lambda'-1)=+(a+\lambda-1).$$

Unsere obigen Resultate inbetreff der Hauptintegrale Y_1 und Y_2 stehen hiermit im Einklang.

Auf diese Weise können wir die Reihenentwicklung für Y_1 noch vervollständigen. Das dem Y_2 entsprechende, bei $x=o$ mehrdeutige Hauptintegral von (I*) sei H_2. Mit Hilfe der Gleichungen (39), (41) und (42) können wir für H_2 sofort die Reihenentwicklung angeben:

$$H_2=\int_0^x (v-x)^{a+\varkappa+\lambda-2}\, v^{-\varkappa}\, dv \overline{\int_{-\infty}^{(v,o,1)}} e^u\, u^{a+\varkappa-1}\,(u-1)^{b-\varkappa-1}\,(u-v)^{-a}\, du$$

$$=c.x^{a+\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-a)_\nu \frac{[1-\varkappa]_\nu^+}{[a+\lambda]_\nu^+}\,\frac{F(1-b+\varkappa;\nu-b+2;1)}{[b-2]_\nu}x^\nu,$$

wo $c=(-1)^{a+\varkappa+\lambda-2}\,E(1-\varkappa,a+\varkappa+\lambda-1)\overline{\Gamma}(b-1).$

Unter Berücksichtigung der Gl. (40) können wir behaupten, da eine zweite eindeutige, transcendente ganze Funktion nicht existiert, welche die Differentialgleichung (I) befriedigt, dass die transcendente ganze Funktion Y_1 die Reihenentwicklung besitzt:

$$Y_1=\text{const.}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-a)_\nu\,\frac{[1-\varkappa]_\nu^+}{[a+\lambda]_\nu^+}\,\frac{F(1-b+\varkappa;\nu-b+2;1)}{[b-2]_\nu}x^\nu. \quad (31^*)$$

Die Erkenntnis der Eigenschaften von η liefert uns zugleich Aufschlüsse über die Beschaffenheit von y, da wir eine Brücke gefunden haben, um von dem einen Gebiete zu dem andern zu gelangen, nämlich die Gleichung (40). Ersetzt man

$$\Phi = (v-x)^{\varkappa-1}\, v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\, u^{a+\varkappa-1}\, e^{u}\, (u-1)^{b-\varkappa-1}\, (u-v)^{\lambda-1}$$

durch

$$\Psi = (v-x)^{\varkappa'-1}\, v^{-(a'+\varkappa'+\lambda'-1)}\, u^{a'+\varkappa'-1}\, e^{u}\, (u-1)^{b'-\varkappa'-1}\, (u-v)^{\lambda'-1}$$

$$= (v-x)^{a+\varkappa+\lambda-2}\, v^{-\varkappa}\, u^{a+\varkappa-1}\, e^{u}\, (u-1)^{b-\varkappa-1}\, (u-v)^{-a}\,,$$

so erhält man das System der Hauptintegrale für η, wenn dieselben für y bekannt sind; infolge der Gleichung

$$y = x^{-(a+\lambda-1)} \cdot \eta$$

lassen sich dann Beziehungen zwischen den Doppelintegralen und den ihnen entsprechenden Reihen dieser beiden Klassen aufstellen, die nicht ohne Interesse sein dürften. Wir wollen aber von diesen korrespondierenden Betrachtungen jetzt absehen.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass in der Reihe für Y_1 $(a+\lambda-1)$ gleich einer positiven ganzen Zahl mit Einschluss der Null sein darf, und dass in derjenigen für Y_2 $(a+\lambda-1)$ gleich einer negativen ganzen Zahl mit Einschluss der Null sein darf, ohne dass diese Reihen ihren Sinn verlieren. Es ist jedoch sofort ersichtlich, dass sie in einander übergehen, wenn $a+\lambda-1=0$; dies ist auch bei den Integralen Y_1 und Y_2 der Fall, wenn $(a+\lambda-1)$ gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl ist: für das fehlende Integral tritt dann eine logarithmische Ergänzung hinzu. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen. Als Analogon hierzu kann man die Hauptintegrale der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Koeffizienten betrachten.

Für die Umgebung des Punktes $x=o$ bleibt nur noch das bereits gefundene mehrdeutige Hauptintegral

$$H^{(o)}=\int_0^x dv \overline{\int_1^{(v,o)}} \Phi\, du \tag{43}$$

zu erörtern. Durch die Einsetzung der Binomialreihe

$$(u-v)^{\lambda-1}=u^{\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^{\nu}(\lambda-1)_{\nu}\left(\frac{v}{u}\right)^{\nu}$$

und durch die Substitution $v=\mathfrak{v}x$ transformiert sich dasselbe in die Potenzreihe

$$H^{(0)}=x^{-(a+\lambda-1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^{\nu}(\lambda-1)_{\nu}\, P_{\nu}\, x^{\nu}, \quad \text{wo } P_{\nu}$$

das Produkt zweier konstanter einfacher Integrale ist, nämlich

$$P_{\nu}=\int_0^1 \mathfrak{v}^{\nu-(a+\varkappa+\lambda-1)}(\mathfrak{v}-1)^{\varkappa-1}d\mathfrak{v}\overline{\int_1^{(0)}} e^{u}\, u^{a+\varkappa+\lambda-\nu-2}(u-1)^{b-\varkappa-1}du.$$

Nun ist (l. c. pag. 525)

$$\overline{\int_1^{(0)}} e^{u}\, u^{a+\varkappa+\lambda-\nu-2}(u-1)^{b-\varkappa-1}du=(-1)^{a+b+\lambda-2}e\,\overline{E}(b-\varkappa, a+\varkappa+\lambda-1)$$

$$\cdot\frac{[a+b+\lambda-2]_{\nu}}{[a+\varkappa+\lambda-2]_{\nu}}F(b-\varkappa; a+b+\lambda-\nu-1; -1),$$

und ferner ist

$$\int_0^1 \mathfrak{v}^{\nu-(a+\varkappa+\lambda-1)}(\mathfrak{v}-1)^{\varkappa-1}d\mathfrak{v}=E(\nu+2-(a+\varkappa+\lambda),\varkappa)$$

$$=\frac{[2-(a+\varkappa+\lambda)]^{+}_{\nu}}{[2-(a+\lambda)]^{+}_{\nu}}E(2-(a+\varkappa+\lambda),\varkappa).$$

Mithin ergiebt sich für $H^{(0)}$ die Reihenentwicklung

$$H^{(0)}=A.x^{-(a+\lambda-1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^{\nu}(\lambda-1)_{\nu}\frac{[2-(a+\varkappa+\lambda)]^{+}_{\nu}}{[2-(a+\lambda)]^{+}_{\nu}}$$

$$\cdot\frac{[a+b+\lambda-2]_{\nu}}{[a+\varkappa+\lambda-2]_{\nu}}F(b-\varkappa; a+b+\lambda-\nu-1; -1)\, x^{\nu}. \tag{44}$$

Die Konstante A hat den Wert

$$A = (-1)^{a+b+\lambda-2} e\, E(2-(a+\varkappa+\lambda)\,\varkappa)\, \overline{E}(b-\varkappa, a+\varkappa+\lambda-1).$$

Sind die für die Konvergenz des Doppelintegrals sonst notwendigen Voraussetzungen

$$\Re(2-(a+\lambda)) > \Re(\varkappa) > 0$$

nicht erfüllt, so ist die bei Y_2 bereits gemachte Bemerkung zu beachten. Es bleiben bei dem Doppelintegrale mit geschlossener Integrationskurve die vorstehenden Rechnungen fast unverändert bestehen, es tritt nur an Stelle des in A enthaltenen konstanten Integrals $E(2-(a+\varkappa+\lambda),\varkappa)$ ein erweitertes Euler'sches Integral erster Art.

Ausser den Hauptintegralen Y_1 und Y_2 existiert in der Umgebung des Punktes $x=1$ noch ein eindeutiges. Das Doppelintegral

$$y^{(1)} = \overline{\int_0^{(x,1)}} dv \int_1^v \Phi\, du \tag{45}$$

entspricht dem oben behandelten Integral $y^{(0)}$ und ist aus den dort angeführten Gründen, mutatis mutandis, eine endliche, stetige und eindeutige Funktion im Bezirke von $x=1$. Es ist jedoch noch nicht erwiesen, dass die Grenzenbedingung befriedigt wird, oder dass $y^{(1)}$ ein Integral der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung (I) ist. Wir werden den Nachweis hierfür a posteriori führen.

Da mod $(x-1) <$ mod $(v-1)$ angesehen werden darf, so kann man für $(v-x)^{\varkappa-1}$ die Binomialreihe

$$(v-x)^{\varkappa-1} = (v-1)^{\varkappa-1} \sum_{n=o}^{n=\infty} (-1)^n (\varkappa-1)_n \left(\frac{x-1}{v-1}\right)$$

setzen, folglich ist

$$y^{(1)} = \sum_{n=o}^{n=\infty} (-1)^n (\varkappa-1)_n\, \mathfrak{P}_n\, (x-1)^n,$$

wenn wir unter $\mathfrak{P}_n$ das konstante Doppelintegral verstehen

$$\mathfrak{P}_n = \overline{\int_0}^{(1)} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} (v-1)^{\varkappa-n-1} dv \int_1^v e^u n^{a+\varkappa-1} (n-1)^{b-\varkappa-1} (n-v)^{\varkappa-1} dv$$

Nun ist nach Gleichung (22)

$$\int_1^v e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du = (-1)^{\lambda-1} E(b-\varkappa, \lambda).$$

$$.(v-1)^{b-\varkappa+\lambda-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \delta_\nu \frac{[b-\varkappa]_\nu^+}{[b-\varkappa+\lambda]_\nu^+} (v-1)^\nu.$$

Mithin ist $\mathfrak{P}_n$ oder

$$\mathfrak{P}_{n,\nu} = (-1)^{\lambda-1} E(b-\varkappa, \lambda) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \delta_\nu \frac{[b-\varkappa]_\nu^+}{[b-\varkappa+\lambda]_\nu^+}.$$

$$\cdot \overline{\int_0}^{(1)} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} (v-1)^{b+\lambda-n+\nu-2} dv.$$

Es ist aber

$$\overline{\int_0}^{(1)} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} (v-1)^{b+\lambda-n+\nu-2} dv = \overline{E}\big(2-(a+\varkappa+\lambda), b+\lambda-1-n+\nu\big)$$

$$= (-1)^\nu \frac{[b+\lambda-1-n]_\nu^+}{[b-(a+\varkappa+n-1)]_\nu^+} \overline{E}\big(2-(a-\varkappa+\lambda), b+\lambda-1-n\big)$$

$$= (-1)^{n+\nu} \frac{[b+\lambda-1-n]_\nu^+}{[b-(a+\varkappa+n-1]_\nu^+} \frac{[b-(a+\varkappa-1)]_\nu^+}{[b+\lambda-1]_\nu^+} \overline{E}\big(2-(a+\varkappa+\lambda), b+\lambda-1\big)$$

Demnach erhalten wir für $y^{(1)}$ die Reihenentwickelung

$$y^{(1)}=(-1)^{\lambda-1}E(b-\varkappa,\lambda)\overline{E}(2-(a+\varkappa+\lambda),b+\lambda-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \tag{46}$$

$$(-1)^{\nu}(\varkappa-1)_n\,\delta_\nu\frac{[b-(a+\varkappa-1]_n^{+}\;[b+\lambda-1-n]_\nu^{+}\;[b-\varkappa]_\nu^{+}}{[b+\lambda-1]_n^{+}\;[b-(a+\varkappa+n-1)]_\nu^{+}\;[b-\varkappa-\lambda]_\nu^{+}}(x-1)^n.$$

Unter der Annahme, dass

$$y^{(1)}=\overline{\int_0^{(x,1)}}dv\int_1^v\Phi\,du$$

der Differentialgleichung (I) genügt, ist nach Gleichung (4):

$$[\varkappa-2]_3\overline{\int_0^{(x,1)}}(v-x)^{\varkappa-5}v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}G_3(v)dv\int_1^v e^u u^{a+\varkappa-1}(u-1)^{b-\varkappa-1}(u-v)^{\lambda-1}du$$

$$-[\varkappa-2]_2\overline{\int_0^{(x,1)}}(v-x)^{\varkappa-4}v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\Big[(\varkappa-4)_1G_3'(v)-g_3(v)\Big]dv\int_1^v{}''$$

$$+[\varkappa-2]_1\overline{\int_0^{(x,1)}}(v-x)^{\varkappa-3}v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\Big[(\varkappa-3)_2G_3''(v)-(\varkappa-3)_1g_3'(v)$$

$$+g_2(v)\Big]dv\int_1^v{}''$$

$$-\overline{\int_0^{(x,1)}}(v-x)^{\varkappa-2}v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\Big[(\varkappa-2)_3G_3'''(v)-(\varkappa-2)_2g_3''(v)$$

$$+(\varkappa-2)_1g_2'(v)-g_1(v)\Big]dv\int_1^v{}''=0.$$

Wir ordnen die Funktionen $G_3(v)$, $g_3(v)$, $g_2(v)$ und $g_1(v)$ nach $(v-1)$, es ist

$G_3(v)=(v-1)\left[(v-1)^2+2(v-1)+1\right]$

$g_3(v)=(v-1)^3+\alpha_2(v-1)^2+\alpha_1(v-1)+(b+\lambda-4)$

$g_2(v)=(-2a+\varkappa-5)(v-1)^2+\beta_1(v-1)+\beta_0$

$g_1(v)=(a-1)(a-2\varkappa+4)(v-1)+\gamma_0,$

wenn wir vorübergehend die Abkürzungen gebrauchen:

$$\alpha_2 = -2a + b - \lambda - 4$$
$$\alpha_1 = -2a + 2b - 9$$
$$\beta_1 = a^2 - 2ab + (\lambda + 5)a - (\lambda + 2)b + 2\varkappa + 5\lambda - 2$$
$$\beta_0 = -2ab - (\lambda - 6)a - (\lambda + 2)b + \varkappa - \lambda^2 + 4\lambda + 3$$
$$\gamma_0 = (a+1)(ab - 2a + \lambda b - 2\varkappa - 3\lambda + 4).$$

Durch Entwicklungen der Potenzen $(v-x)^{\varkappa-5} \ldots (v-x)^{\varkappa-2}$ nach der Binomialreihe

$$(v-x)^{\varkappa-5} = (v-1)^{\varkappa-5} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (\varkappa-5)_n \left(\frac{x-1}{v-1}\right)^n$$

. . . .

erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (x-1)^n \overline{\int_0^{(1)}} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} (v-1)^{\varkappa-n-4} \Big\{ (v-1)^{-1} [\varkappa-n-2]_3 G_3(v) - [\varkappa-n-2]_2 \left[(\varkappa-4)_1 G_3'(v) - g_3(v)\right]$$
$$(v-1)[\varkappa-n-2]_1 \left[(\varkappa-3)_2 G_3''(v) - (\varkappa-3)_1 g_3'(v) - g_2(v)\right]$$
$$+ (v-1) \left[(\varkappa-2)_3 G_3'''(v) - (\varkappa-2)_2 g_3''(v) + (\varkappa-2)_1 g_2'(v) - g_1(v)\right] \Big\} dv$$
$$\cdot \int_1^v e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du = 0, \text{ oder}$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (x-1)^n \overline{\int_0^{(1)}} v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} (v-1)^{\varkappa-n-5} \cdot \Big\{ (a+n)(a+n+1)(v-1)^3 + \left[\gamma_0 - \beta_1 [n]_1 + \alpha_2 [n]_2 - [n]_3\right] (v-1)^2$$
$$+ \left[\beta_0 - \alpha_1 [n]_1 + 2[n]_2\right] (\varkappa-n-2)(v-1) + (b+\lambda-n-1)[\varkappa-n-2]_2 \Big\} dv$$
$$\cdot \int_1^v e^u u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} (u-v)^{\lambda-1} du = 0.$$

Damit diese Gleichung identisch erfüllt sei, müssen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von $(x-1)$ verschwinden. Man sieht jetzt sofort, dass wir auf diese Weise eine lineare Relation zwischen je vier konstanten kontiguen Doppelintegralen erhalten, und dass dieselben mit den oben definierten $\mathfrak{P}_n$ identisch sind.

Es ergiebt sich leicht, dass

$$(a+1)a\mathfrak{P}_0+\gamma_0\mathfrak{P}_1+\beta_0(\varkappa-2).\mathfrak{P}_2+(b+\lambda-4)(\varkappa-2)(\varkappa-3).\mathfrak{P}_3=0.$$

. . . .

$$(a+n-2)(a+n-3)\mathfrak{P}_{n-3}+\left[\gamma_0-\beta_1[n\text{-}3]_1+\alpha_2[n\text{-}3]_2-[n\text{-}3]_3\right]\mathfrak{P}_{n-2}$$
$$+\left[\beta_0-\alpha_1[n-3]_2+2[n-3]_3\right](\varkappa-n+1)\mathfrak{P}_{n-1}$$
$$+(b+\lambda-n-1)(\varkappa-n+1)(\varkappa-n)\mathfrak{P}_n=0$$

. . . .

Versuchen wir andererseits die Differentialgleichung (I) direkt durch die unendliche Reihe

$$y=\sum_{n=o}^{n=\infty}(-1)^n(\varkappa-1)_n C_n(x-1)^n \qquad (47)$$

$$=C_0-C_1(\varkappa-1)_1(x-1)+C_2(\varkappa-1)_2(x-1)^2-+\ \ldots \quad \text{in inf.}$$

zu integrieren, so zeigt sich, dass die Konstanten C_0, C_1, C_2, C_3, ... C_{n-3}, C_{n-2}, C_{n-1}, C_n in ganz derselben Weise mit einander verbunden sind, wie die konstanten Doppelintegrale $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, . . . $\mathfrak{P}_{n-3}$, $\mathfrak{P}_{n-2}$, $\mathfrak{P}_{n-1}$, $\mathfrak{P}_n$. In der Reihe (47) können C_0, C_1 und C_2 beliebige Konstanten sein. Wählen wir sie nun speciell so, dass

$$C_0=\mathfrak{P}_0$$
$$C_1=\mathfrak{P}_1 \text{ und}$$
$$C_2=\mathfrak{P}_2, \text{ so ist allgemein}$$
$$C_n=\mathfrak{P}_n.$$

Infolge dessen wird

$$y^{(1)}=\sum_{n=o}^{n=\infty}(-1)^n\ (\varkappa-1)_n\ \mathfrak{P}_n(x-1)^n$$

mit der Reihe (47) identisch. Und da diese erwiesenermassen der Differentialgleichung (I) genügt, so ist jetzt nachträglich bewiesen, dass

$$y^{(1)}=\int_o^{\overline{(x,1)}}dv\int_1^v\Phi\, du$$

ein bei $x=1$ eindeutiges Hauptintegral der vorgelegten, linearen homogenen Differenterialgleichung vierter Ordnung ist.

Für die Umgebung der endlichen singulären Punkte haben wir nur noch das im Bezirke x=1 mehrdeutige Hauptintegral zu behandeln Dasselbe ist bereits gefunden:

$$H^{(1)} = \int_1^x dv \int_1^v \Phi \, du \tag{48}$$

Wir wenden auf dies Doppelintegral die Substitutionen

$$u-1=(v-1)\mathfrak{u}=(x-1)\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$$

an oder nur die letzte, wenn wir die Gleichung (22) benützen. Infolge dieser Gleichung erhält man zunächst

$$H^{(1)} = (-1)^{\lambda-1} E(b-\varkappa,\lambda) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \delta_\nu \frac{[b-\varkappa]_\nu^+}{[b-\varkappa+\lambda]_\nu^+}$$

$$\cdot \int_1^x v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} (v-1)^{b-\varkappa+\lambda+\nu-1} (v-x)^{\varkappa-1} dv.$$

Es ist aber wegen der Substitution

$$v-1=(x-1)\mathfrak{v}$$

und infolge der konvergenten Binomialreihe

$$\left[1+(x-1)\mathfrak{v}\right]^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{[a+\varkappa+\lambda-1]_\nu^+}{n!} (x-1)^n \mathfrak{v}^n :$$

$$\int_1^x v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)} \cdot (v-1)^{b-\varkappa+\lambda+\nu-1} (v-x)^{\varkappa-1} dv$$

$$=(x-1)^{b+\lambda+\nu-1} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{[a+\varkappa+\lambda-1]_n^+}{n!} (x-1)^n E(b-\varkappa+\lambda+n+\nu,\varkappa)$$

$$=E(b-\varkappa+\lambda,\varkappa)(x-1)^{b+\lambda+\varkappa-1} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{[a+\varkappa+\lambda-1]_n^+}{n!}$$

$$\frac{[b-\varkappa+\lambda]_{n+\nu}^+}{[b+\lambda]_{n+\nu}^+} (x-1)^n.$$

Es ergiebt sich daher schliesslich für $H^{(1)}$ die unendliche Doppelsumme

$$H^{1}=(-1)^{\lambda-1} E(b-\varkappa\lambda)\, E(b-\varkappa\lambda-\varkappa)(x-1)^{b-\lambda-1} \sum_{n=0}^{n=\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \tag{49}$$

$$(-1)^{n} \delta_{\nu} \frac{[a+\varkappa+\lambda-1]_{n}}{n!} \frac{[b-\varkappa+\lambda]_{n-\nu}}{[b+\lambda]_{n-\nu}} \frac{[b-\varkappa]_{\nu}}{[b-\varkappa+\lambda]_{\nu}} (x-1)^{n-\nu}.$$

wo die Summation über ν zuerst zu vollziehen ist.

Für die Horizontfläche sind bereits zwei **Hauptintegrale** gefunden und erörtert. Y_1 und Y_2. Es ist bemerkenswert, dass in diesem Gebiete ein Hauptintegral existiert. welches **nur nach** erster Art unstetig wird, nämlich

$$Z=\int_{x}^{\infty} dv \int_{0}^{1} \Phi\, du. \tag{50}$$

wofür man nach Belieben auch das Integral

$$\int_{x}^{(0,1)} dv \int_{0}^{1} \Phi\, du$$

wählen kann. Das letzte Integral verdient unter Umständen den Vorzug, weil zu seiner Konvergenz nicht so viele Ungleichheiten der Konstanten erfüllt zu sein brauchen.

Wenden wir auf das Doppelintegral Z die Substitution

$$v=\frac{x}{\mathfrak{v}}$$

an, so ergiebt sich, dass

$$Z=(-1)^{\lambda-1} x^{-a} \int_{0}^{1} \mathfrak{v}^{a-1} (1-\mathfrak{v})^{\varkappa-1} d\mathfrak{v} \int_{0}^{1} e^{u}\, u^{a+\varkappa-1} (u-1)^{b-\varkappa-1} \left(1-\frac{u\mathfrak{v}}{x}\right)^{\lambda-1} du,$$

Dieses Doppelintegral ist konvergent, wenn der reelle Teil von a und $\varkappa$ grösser als Null ist, weil eine endlich bleibende Funktion zwischen endlichen Grenzen integriert wird. Auch lässt diese Form erkennen, dass $x^{a}.\, Z$ für grosse Werte von x endlich d. h., dass Z das Produkt aus der Potenz x^{-a} und einer nach

fallenden Potenzen von x fortschreitenden Reihe ist. Zur Entwicklung von Z in diese Potenzreihe ist es zur Abkürzung der Rechnung vorteilhaft, die Gleichung (17) zu benützen; darnach hat man sofort

$$Z=(-1)^{b-\varkappa+\lambda} E(a+\varkappa, b-\varkappa)\, x^{-a} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} (\lambda-1)_{\nu} \frac{[a+\varkappa]_{\nu}^{+}}{[a+b]_{\nu}^{+}}$$

$$F(a+\varkappa+\nu;\, a+b+\nu;\, 1)\, x^{-\nu} \int_0^1 \mathfrak{v}^{a+\nu-1} (1-\mathfrak{v})^{\varkappa-1} d\mathfrak{v}.$$

Nun ist $\int_0^1 \mathfrak{v}^{a+\nu-1} (1-\mathfrak{v})^{\varkappa-1} d\mathfrak{v} = E(a+\nu, \varkappa) = \frac{[a]_{\nu}^{+}}{[a+\varkappa]_{\nu}^{+}} E(a, \varkappa)$; folglich,

$$Z=(-1)^{b-\varkappa+\lambda} E(a+\varkappa, b-\varkappa)\, E(a,\varkappa)\, x^{-a} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} (\lambda-1)_{\nu} \cdot$$

$$\frac{[a]_{\nu}^{+}}{[a+b]_{\nu}^{+}} F(a+\varkappa+\nu;\, a+b+\nu;\, 1)\, x^{-\nu}. \tag{51}$$

Man beachte, dass die hier auftretende unendliche Reihe dasselbe Bildungsgesetz zeigt, wie die Reihe beim analogen Integral ζ der Tissot'schen Differentialgleichung dritter Ordnung; hierin liegt ein Beweis für ihre Konvergenz.

Das vierte Hauptintegral im Gebiete grosser Werte von x ist ein Analogon zu ω (s. Gl. (18)):

$$\Omega = \int_x^{\overline{(0,1)}} dv \int_v^{\overline{(0,1)}} \Phi\, du. \tag{52}$$

Wenn x die Verbindungslinie der Punkte 0 und 1 in positivem Sinne umkreist, so nimmt Ω den Faktor

$$e^{2\pi i b}$$

auf (cf. Pochhammer, Ueber eine Classe von Integralen mit ge-

schlossener Integrationscurve. Math. Ann. Bd. 37); Ω ist eine unendliche Doppelreihe von der Form

$$x^b \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu,$$

sodass deren wirkliche Darstellung in eine Potenzreihe schwerlich gelingen wird.

§ 6.

Durch die vorhergehenden Untersuchungen sind wir zu den Resultaten gelangt, dass die lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\begin{aligned} x^2(x-1)\frac{d^4y}{dx^4} - x\left[x^2+(b+\lambda-5)x-2(a+\lambda+1)(x-1)\right]\frac{d^3y}{dx^3} \\ +\Big((-2a+\lambda-5)x^2-\left[(a+\lambda+1)(b+\lambda-5)+(a+1)(b-3)\right]x \\ \text{(I)} \qquad +(a+\lambda)(a+\lambda+1)\ (x-1)\Big)\frac{d^2y}{dx^2} \\ -(a+1)\left[(a-2\varkappa+4)x+(a+\lambda)(b-3)\right]\frac{dy}{dx} \\ +(\varkappa-1)a(a+1)\ y=0, \end{aligned}$$

deren Integral in der Horizontfläche nach zweiter Art unstetig wird, erstens ein Integral besitzt, welches eine transcendente ganze Funktion von x ist, nämlich

$$Y_1=\overline{\int}_{-\infty}^{(x,o)}(v-x)^{\varkappa-1}\,v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\,dv\overline{\int}_{-\infty}^{(v,o,1)}e^u\,u^{a+\varkappa-1}\,(u-1)^{b-\varkappa-1)}\,(u-v)^{\lambda-1}du,$$

und dass ein anderes Hauptintegral

$$Y_2=\int_0^x(v-x)^{\varkappa-1}\,v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\,dv\overline{\int}_{-\infty}^{(v,o,1)}e^u\,u^{a+\varkappa-1}\,(u-1)^{b-\varkappa-1}\,(u-v)^{\lambda-1}\,du$$

das Produkt aus der Potenz $x^{-(a+\lambda-1)}$ und einer transcendenten ganzen Funktion von x ist, während das Hauptintegral in der Horizontfläche

$$Z=\int_x^\infty(v-x)^{\varkappa-1}\,v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\,dv\int_0^1 e^u\,u^{a+\varkappa-1}\,(u-1)^{b-\varkappa-1}\,(u-v)^{\lambda-1}\,du$$

die Unstetigkeiten zweiter Art entbehrt. Im Gebiete der grossen Werte von x giebt es drei Hauptintegrale mit Unstetigkeiten zweiter Art und eins mit nur Unstetigkeiten erster Art.

Die obige, lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung transformiert sich durch die Substitution

$$y = x^{-(a+\lambda-1)}\,\eta$$

in die lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung

$$
\begin{aligned}
&x^2(x-1)\frac{d^4\eta}{dx^4} - x\left[x^2+(b+\lambda-5)x+2(a+\lambda-3)(x-1)\right]\frac{d^3\eta}{dx^3}\\
&+\Big((a+\varkappa+3\lambda-8)x^2+\left[(a+\lambda-3)(b+\lambda-5)+(\lambda-2)(a+b+\lambda-4)\right]x\\
(I^*)\qquad &\qquad +(a+\lambda-2)(a+\lambda-3)\,(x-1)\Big)\frac{d^2\eta}{dx^2}\\
&-(\lambda-2)\left[(a+2\varkappa+3\lambda-7)x+(a+\lambda-2)(a+b+\lambda-4)\right]\frac{d\eta}{dx}\\
&\qquad +(a+\varkappa+\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-2)\,\eta=0.
\end{aligned}
$$

Diese beiden Differentialgleichungen gehen durch blosse Konstantenvertauschung in einander über und zwar durch die folgenden

(I)	(I*)
a	$-(\lambda-1)$
b	$a+b+\lambda-1$
$\varkappa$	$a+\varkappa+\lambda-1$
λ	$-(a-1)$

Bezeichnen wir, wie oben, mit $\Phi(u,v,x)$ oder Φ die Funktion

$$\Phi=(v-x)^{\varkappa-1}\,v^{-(a+\varkappa+\lambda-1)}\,e^{u}\,u^{a+\varkappa-1}\,(u-1)^{b-\varkappa-1}\,(u-v)^{\lambda-1},$$

so lautet das System der Hauptintegrale

1. in der Umgebung des Punktes $x=0$:

$$\left.\begin{aligned}
Y_1&=\overline{\int_{-\infty}^{(x,o)}}dv\overline{\int_{-\infty}^{(v,o,1)}}\Phi\,du\\
y^{(o)}&=\overline{\int_{1}^{(x,o)}}dv\int_{1}^{v}\Phi\,du
\end{aligned}\right\}\quad\text{(eindeutig)}$$

$$Y_2 = \int_0^x dv \int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} \Phi\, du$$

$$H^{(0)} = \int_0^x dv \int_1^{\overline{(v,o)}} \Phi\, du$$

(mehrdeutig; Anfangsexp. $= -(a+\lambda-1)$)

2. in der Umgebung des Punktes $x=1$:

$$Y_1 = \int_{-\infty}^{\overline{(x,o)}} dv \int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} \Phi\, du$$

$$Y_2 = \int_0^x dv \int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} \Phi\, du$$

$$y^{(1)} = \int_0^{\overline{(x,1)}} dv \int_1^v \Phi\, du$$

(eindeutig)

$$H^{(1)} = \int_1^x dv \int_1^v \Phi\, du$$

(mehrdeutig; Anfangsexp. $= b+\lambda-1$)

3. in der Horizontfläche:

$$Y_1 = \int_{-\infty}^{\overline{(x,o)}} dv \int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} \Phi\, du \qquad \text{(eindeutig)}$$

$$Y_2 = \int_0^x dv \int_{-\infty}^{\overline{(v,o,1)}} \Phi\, du \qquad x^{-(a+\lambda-1)}$$

$$Z = \int_x^\infty dv \int_0^1 \Phi\, du \qquad \text{mehrd., wie } x^{-a}$$

$$\Omega = \int_x^{\overline{(o,1)}} dv \int_v^{\overline{(o,1)}} \Phi\, du \qquad x^{b}$$

Für diese Doppelintegrale finden sich, bis auf Ω, die Reihenentwicklungen im vorhergehenden Paragraphen.

Das allgemeine Integral der vorgelegten, linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung ist demnach

$$y = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 y^{(o)} + a_4 H^{(o)} \qquad \text{(bei } x = o\text{)}$$

$$y = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 y^{(1)} + b_4 H^{(1)} \qquad \text{(bei } x = 1\text{)}$$

$$y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Z + c_4 \Omega \qquad \text{(bei } x = \infty\text{)},$$

wo $a, b_1, c_1, \ldots a_4, b_4, c_4$ beliebige Konstanten bedeuten.

Man beachte noch, dass der Fuchs'sche Satz, betreffend die zu den Hauptintegralen gehörigen Anfangsexponenten, erfüllt ist, denn es ist

$$-(a+\lambda)-(a+\lambda)+(b+\lambda) \equiv -(a+\lambda)-a+b.$$

Thesen.

1. Die isogonalen Trajektorien der gradlinigen Erzeugenden eines Kreisevolventencylinders besitzen die Eigenschaft, dass ihr Krümmungsradius ϱ eine lineare Funktion von ϑ und von τ ist, wenn man mit $d\vartheta$ und $d\tau$ die Winkel bezeichnet, welche zwei unendlich benachbarte Oskulationsebenen resp. Tangenten mit einander bilden. Auch die Umkehr ist richtig und enthält den Puiseux'schen Satz als Specialfall.

2. Die Fläche der Hauptnormalen der Schraubenlinie auf einem Kreisevolventencylinder und eine ihr nahe verwandte, gradlinige, windschiefe Fläche sind in den Fällen technisch beachtenswert, wenn die Schraubenmutter ein ausweichendes Medium ist (cf. D. R. P. 81306).

3. Bedeutet i den Winkel, um welchen der Radius R der Schmiegungskugel gegen die Oskulationsebene geneigt ist, sodass also der Krümmungsradius $\varrho = R \cos i$, so ist

$$i = \vartheta + \text{const.}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Krümmungsmittelpunktskurve eine geodätische Linie der Evolutfläche ist.

Lebenslauf.

Der Verfasser, Georg August Heinrich zur Kammer, wurde am 30. Dezbr. 1861 zu Hohenmoor, Kr. Hoya, Provinz Hannover, als Sohn eines Landwirts geboren und im evangelischen Glauben erzogen. Er besuchte das Realgymnasium zu Lüneburg und bestand Ostern 1884 die Reifeprüfung unter Dispensation vom mündlichen Examen. Von S. S. 1884 bis S. S. 1885 machte er sich durch Vorlesungen an der Universität und an der polytechnischen Hochschule zu München mit den Anfangsgründen der höheren Mathematik bekannt; im W. S. $18^{85}/_{86}$ studierte er in Berlin; von S. S. 1886 bis W. S. $18^{88}/_{89}$ hörte er Vorlesungen in Göttingen über verschiedene Teile der höheren Mathematik, über Physik, Philosophie, Chemie und Mineralogie und nahm mehrfach an praktischen Uebungen teil. Ostern 1891 setzte er seine Studien in Kiel fort und war hier vom 1. Okt. 1893 bis 1. April 1895 Assistent am physikalischen Institut der Universität. Am 20. Juli v. J. bestand er das examen rigorosum, am 27. Juli erlangte er in der Prüfung pro fac. doc. die Lehrbefähigung in Mathematik, Physik und Chemie für alle Klassen, und jetzt ist er Lehrer an der Kaiserlichen Deckoffizierschule in Kiel.

Seinen zahlreichen Lehrern ist er zu dauerndem Danke verpflichtet, besonders den Herren Professoren H. A. Schwarz, Geh. Reg. Rat L. Pochhammer, Geh. Reg. Rat G. Karsten, L. Weber und H. Ebert.

